

INTRODUCTION.

1. Exemple: 

Soit a l'interrupteur.

◇ Si a est fermé le courant passe, on dit que $a = 1$.

◇ Si a est ouvert le courant ne passe pas, on dit que $a = 0$.

a est une variable de Boole qui ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

2.. Généralisation pour deux interrupteurs. on a donc deux variables de Boole a , b .

•• Premier type de montage: (En série .)



◇ Si ($a = 0$ et $b = 1$) ou ($a = 1$ et $b = 0$) ou ($a = 0$ et $b = 0$) ,

c.-à-d. si l'un des interrupteurs au moins est ouvert, alors le courant ne passe pas.

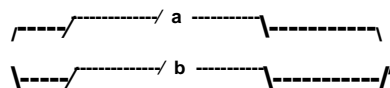
On dit que $a . b = 0$

◇ Si ($a = 1$ et $b = 1$) , c.-à-d. les deux interrupteurs sont fermés alors le courant passe.

On dit: $a . b = 1$

- La multiplication des deux variables (booléennes) s'apparente au connecteur logique " et " .

•• Second type de montage: (En parallèle)



◇ Si ($a = 0$ et $b = 1$) ou ($a = 1$ et $b = 0$) ou ($a = 1$ et $b = 1$) ,

c.-à-d. si l'un des interrupteurs au moins est fermé,

alors le courant passe. On dit : $a + b = 1$

◇ Si ($a = 0$ et $b = 0$) , c.-à-d. les deux interrupteurs sont ouverts alors le courant ne passe pas.

On dit : $a + b = 0$

La somme des deux variables (booléennes) s'apparente au connecteur " ou "

1. ASPECT THEORIQUE.

Une algèbre de Boole est un ensemble E (non vide), dont les éléments sont des variables notées a, b, c, d, e, f, g etc. " dites booléennes" qui ne peuvent prendre que deux valeurs 0 ou 1, muni de trois opérations.

+ " la somme booléenne" définie par :

a	b	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

• le "produit booléen" défini par:

a	b	a • b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

• la "complémentation" définie par:

a	\bar{a}
0	1
1	0

et qui ont des particularités.

- | | |
|------------------------------------|---|
| + est Associative. | $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ |
| + admet 0 comme élément Neutre. | $a + 0 = 0 + a = a$ |
| + est commutative. | $a + b = a + b$ |
| + est Distributive par rapport à • | $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ |
| • est Associative. | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ |
| • admet 1 comme élément Neutre. | $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ |
| • est Commutative. | $a \cdot b = a \cdot b$ |
| • est Distributive par rapport à + | $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ |

Existence d'un complémentaire a pour tout a dans E

$$a + \bar{a} = 1 \quad a \cdot \bar{a} = 0 \quad \text{pour tout } a \text{ dans } E$$

2. EXEMPLE.

L'ensemble des propositions mathématiques
avec les opérations "ou" "et" "NON".

3. PROPRIETES DE L'ALGEBRE DE BOOLE $E (+, \cdot, \bar{})$

Soit a, b, c trois variables booléennes c.-à-d. trois éléments de E .

◇ Pour tout a dans E (Idempotence)

$$a + a = a \quad \text{Aucun multiple} \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

$$a \cdot a = a \quad \text{Aucune puissance} \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

◇ Pour tout a et tout b dans E (Absorption)

$$a + (a \cdot b) = a \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

$$a \cdot (a + b) = a$$

◇ Pour tout a et tout b dans E (Lois de Morgan)

$$\text{La complémentation de } a + b \text{ est } \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

$$\text{La complémentation de } a \cdot b \text{ est } \bar{a} + \bar{b} \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

◇ Pour tout a et tout b dans E

$$a + 1 = 1 \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

$$a + (\bar{a} \cdot b) = a + b \quad (\text{TRES IMPORTANT pour les exercices.})$$

$$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$$

4. Remarque:

$$a + (\bar{a} \cdot b) \text{ est interprété même sans parenthèse comme } a + b.$$

Par contre pour $a \cdot (\bar{a} + b)$ il faut mettre les parenthèses pour éviter
les confusions.

5. Mintermes- maxtermes

Un « minterme » de n variables booléennes est un produit comportant n facteurs, chaque facteur correspondant à une variable donnée ou à son complémentaire

Un « maxterme » de n variables booléennes est une somme comportant n termes, chaque terme correspondant à une variable donnée ou à son complémentaire

♥ Les Minterms de deux variables a et b sont les expressions suivantes :

$$a \cdot b ; \quad a \cdot \bar{b} ; \quad \bar{a} \cdot b ; \quad \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \text{TRES IMPORTANT}$$

On peut les faire apparaître dans un tableau:

a \ b	0	1
0	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	$\bar{a} \cdot b$
1	$a \cdot \bar{b}$	$a \cdot b$

Quand une expression A ne comporte que deux variables a et b

On peut toujours la présenter comme somme de certains des minterms

$a \cdot b$; $a \cdot \bar{b}$; $\bar{a} \cdot b$; $\bar{a} \cdot \bar{b}$ Dans le tableau précédent on

met des 1 à la place des minterms dont elle est la somme.

Par exemple; Soit $A = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{b}$ va se traduire par le tableau

(De Karnaugh) suivant. :

a \ b	0	1
0	1	
1	1	

Ici on trouve $A = \bar{b}$ à l'aide visuelle du tableau de Karnaugh de A.

♥ Les Minterms de trois variables a, b, c sont les expressions suivantes :

$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$; $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$; $\bar{a} \cdot b \cdot c$; $\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$; $a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$;

$a \cdot \bar{b} \cdot c$; $a \cdot b \cdot c$; $a \cdot b \cdot \bar{c}$

On les met en évidence dans le tableau ci-dessous.

a \ bc	00	01	11	10
0	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	$\bar{a} \cdot b \cdot c$	$\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$
1	$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	$a \cdot \bar{b} \cdot c$	$a \cdot b \cdot c$	$a \cdot b \cdot \bar{c}$

Quand une expression A ne comporte que trois variables a , b , c

on peut toujours la présenter comme somme de certains des minterms précédents.

Dans le tableau précédent on met des 1 à la place des minterms dont elle est la somme.

Par exemple; Soit $A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$

va se traduire par le tableau

a \ bc	00	01	11	10
0	1			
1			1	1

C'est le tableau de Karnaugh de A. Il permet de simplifier l'expression de A.

Ici on peut dire : $A = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

Comment obtenir une expression simplifiée :

On obtient l'expression simplifiée d'un diagramme de Karnaugh en regroupant les « 1 » adjacents d'abord 8 par 8 si l'on peut, puis, après, 4 par 4, puis, après 2 par 2.

Remarques :

- Deux « 1 » sont adjacents lorsque leurs cases ont un côté commun .On considère que le bord droit et le bord gauche du diagramme sont un côté unique.
- Pour \bar{a} , on aurait pu regrouper autrement les « 1 » adjacents.

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

On aurait pu obtenir : $\bar{a} = \bar{a}c + \bar{a}\bar{c}$

- C'est la disposition 00, 01,11,10 qui rend possible les regroupements.
- Exemple :

a \ bc	00	01	11	10
0	1		1	1
1			1	1

Est celui de l'expression simplifiée : $b + ac + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

Exercices :

EX. 1 Soit les variables booléennes a , b ,c . Indication correction

Soit A l'expression booléenne dont le tableau de Karnaugh est

a\b c	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1	1	1

Donner l'expression de A.

EX. 2 Soit les variables booléennes a , b ,c . [Indication](#) [correction](#)

1. Soit $A = \bar{a} \bar{b} + a \bar{b} + b$. Simplifier A.
2. Soit $B = a b + abc + a \bar{b}$. Simplifier B.
3. Soit $C = \bar{a} \bar{b} \bar{c} + a \bar{b} c + \bar{a} \bar{b} + a \bar{b} \bar{c}$. Simplifier C.
4. Soit $D = (a + b) (\bar{b} + c) (\bar{c} + a)$. Simplifier D.

EX. 3 1. Donner l'expression de A dont le tableau de Karnaugh est :

[Indication](#) [correction](#)

a\b c	00	01	11	10
0	1	1		
1	1		1	1

2. Simplifier l'expression de A à l'aide du tableau.
3. Trouver par le calcul que : $A = a b + a \bar{c} + \bar{a} \bar{b}$.

EX. 4 Simplifier par le calcul $A = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) (a + b) (a + c)$

[Indication](#) [correction](#)

EX. 5 Donner le tableau de Karnaugh de $B = ab + \bar{a} \bar{b}$.

[Indication](#) [correction](#)

EX . 6 [Indication](#) [correction](#)

Donner le tableau de Karnaugh de $H = abc + a \bar{b} c + \bar{a} b c$.

comparer H avec $F = (a + b) c$.

EX.7 [Indication](#) [correction](#)

Soit A de tableau de Karnaugh:

a\b c	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1	1	

Donner l'expression de A.

EX.8 Indication correction

Soit B de tableau de Karnaugh:

a\b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	1	
1	1	1	1	

Donner l'expression de B

EX. 9 Indication correction

$$\text{Soit } E = \bar{a} b c + a c + a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b}$$

Donner son tableau de Karnaugh.

Comparer E et $B = c + \bar{b}$

CORRECTION (indications)

EX. 1 Soit les variables booléennes a, b, c .

Soit A l'expression booléenne dont le tableau de Karnaugh est

a\b c	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1	1	1

Donner l'expression de A.

REP. $A = a + \bar{c}$

EX. 2 Soit les variables booléennes a, b, c .

1. Soit $A = \bar{a} \bar{b} + a \bar{b} + b$. Simplifier A.

2. Soit $B = a b + abc + a \bar{b}$. Simplifier B.

3. Soit $C = \bar{a} \bar{b} \bar{c} + a \bar{b} c + \bar{a} \bar{b} + a \bar{b} \bar{c}$. Simplifier C.

4. Soit $D = (a + b)(\bar{b} + c)(\bar{c} + a)$. Simplifier D.

REP. $A = 1$ $B = a$ $C = \bar{b}$ $D = a \bar{b} + a c$

EX. 3 1. Donner l'expression de A dont le tableau de Karnaugh est :

a\b c	00	01	11	10
0	1	1		
1	1		1	1

2. Simplifier l'expression de A à l'aide du tableau.

3. Trouver par le calcul que : $A = a b + a \bar{c} + \bar{a} \bar{b}$

REP. $A = a b c + a \bar{c} + \bar{a} \bar{b}$.

EX. 4 Simplifier par le calcul $A = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(a + b)(a + c)$

REP. $A = a\bar{b} + a\bar{c} + \bar{a}bc$

EX. 5 Donner le tableau de Karnaugh de $B = ab + \bar{a}\bar{b}$

REP.

a \ b	0	1
0	1	
1		1

EX. 6 Donner le tableau de Karnaugh de $H = abc + a\bar{b}c + \bar{a}bc$

Comparer H avec $F = (a + b)c$.

REP Pour H

a\b c	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	

$F = ac + bc = H$

EX.7 Soit A de tableau de Karnaugh:

a\b c	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1	1	

Donner l'expression de A.

REP. $A = c + a\bar{b}\bar{c}$

EX.8 Soit B de tableau de Karnaugh:

a\b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	1	
1	1	1	1	

Donner l'expression de B.

REP. $B = c + \bar{b}$

EX. 9 Soit $E = \bar{a} b c + a c + a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b}$

Donner son tableau de Karnaugh.

Comparer E et $B = c + \bar{b}$

REP. Voir le tableau de l'ex. 8

CORRECTION (détailée)**EX. 1** Soit les variables booléennes a, b, c .Soit A l'expression booléenne dont le tableau de Karnaugh est

$a \backslash b \ c$	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1	1	1

Donner l'expression de A .**REP. Explications**

$a \backslash b \ c$	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1	1	1

En bleu c'est : a

$a \backslash b \ c$	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1	1	1

En rouge c'est : \bar{c} **Conclusion:** $A = a + \bar{c}$

(On entoure à la main dans le tableau les 1 représentant a et on entoure les 1 qui représentent \bar{c})

EX. 2 Soit les variables booléennes a, b, c .

1. Soit $A = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot \bar{b} + b$. Simplifier A.

On a : $A = (\bar{a} + a) \cdot \bar{b} + b$ Factorisation de \bar{b}

C.-à-d. $A = 1 \cdot \bar{b} + b = \bar{b} + b$ $\bar{a} + a = 1$

Donc $A = 1$ $\bar{b} + b = 1$

2. Soit $B = a \cdot b + a \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b}$. Simplifier B.

On a : $B = a \cdot (b + b \cdot c + \bar{b})$ Factorisation de a

c.-à-d. $B = a \cdot (b + \bar{b})$ $b + b \cdot c = b$

c.-à-d. $B = a \cdot 1$ $b + \bar{b} = 1$

Donc $B = a$

3. Soit $C = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$. Simplifier C.

On a : $C = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c} + a \cdot c + \bar{a} + a \cdot \bar{c})$ Factorisation de \bar{b}

C.-à-d. $C = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} + a \cdot (c + \bar{c}))$ Factorisation partielle de a

C.-à-d. $C = \bar{b} \cdot (\bar{a} + a \cdot (c + \bar{c}))$ $\bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} = \bar{a}$

C.-à-d. $C = \bar{b} \cdot (\bar{a} + a \cdot 1) = \bar{b} \cdot (\bar{a} + a)$ $c + \bar{c} = 1$ $\bar{a} + a = 1$

C.-à-d. $C = \bar{b} \cdot 1$

Donc $C = \bar{b}$

4. Soit $D = (a + b) \cdot (\bar{b} + c) \cdot (\bar{c} + a)$. Simplifier D.

On a : $D = (a + b) \cdot (\bar{b} + c) \cdot (\bar{c} + a)$ Avec les deux premiers facteurs

C.-à-d. $D = (a \cdot \bar{b} + a \cdot c + b \cdot \bar{b} + b \cdot c) \cdot (\bar{c} + a)$ $b \cdot \bar{b} = 0$

C-à-d. $D = (a \cdot \bar{b} + a \cdot c + b \cdot c) \cdot (\bar{c} + a)$

C-à-d. $D = (a \cdot \bar{b} + a \cdot c + b \cdot c) \cdot \bar{c} + (a \cdot \bar{b} + a \cdot c + b \cdot c) \cdot a$

C-à-d $D = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot c \cdot \bar{c} + b \cdot c \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot a + a \cdot c \cdot a + b \cdot c \cdot a$

C-à-d $D = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot 0 + b \cdot 0 + a \cdot \bar{b} + a \cdot c + b \cdot c \cdot a$ c. $\bar{c} = 0$ a. $a = a$

C-à-d $D = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + a \cdot c + b \cdot c \cdot a$ a. $\bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} = a \cdot \bar{b}$

C-à-d $D = a \cdot \bar{b} + a \cdot c$ a. $c + b \cdot c \cdot a = a \cdot c$

REP. A = 1 B = a C = \bar{b} D = $a \bar{b} + a c$

EX. 3 1. Donner l'expression de A dont le tableau de Karnaugh est :

a\b c	00	01	11	10
0	1	1		
1	1		1	1

A est une somme de cinq minterms

$A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$

2. Simplifier l'expression de A à l'aide du tableau.

$A = \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b$

Il y a d'autres écritures simplifiées.

$A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b$ ou encore

$A = a \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b}$

3. Trouver par le calcul que : $A = a b + a \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b}$

$A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$

$A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (\bar{c} + c) + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot (c + \bar{c}) + a \cdot b \cdot \bar{c}$ Factorisation

$A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot 1 + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot 1 + a \cdot b \cdot \bar{c}$ on remet $a \cdot b \cdot \bar{c}$

$$A = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b + a \cdot b \cdot \bar{c}$$

$$A = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot \bar{c}$$

$$A = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + a \cdot \bar{c} (\bar{b} + b)$$

$$A = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + a \cdot \bar{c}$$

REP. $A = a b c + a \bar{c} + \bar{a} \bar{b}$.

EX. 4 Simplifier par le calcul $A = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (a + b) \cdot (a + c)$

REP. $A = a \cdot \bar{b} + a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c$

EX. 5 Donner le tableau de Karnaugh de $B = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$

REP.

a \ b	0	1
0	1	
1		1

EX. 6 Donner le tableau de Karnaugh de $H = a \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c$.

Comparer H avec $F = (a + b) c$.

REP Pour H

a\b c	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	

$$F = a \cdot c + b \cdot c = H$$

EX.7 Soit A de tableau de Karnaugh :

a\b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0		1	1	
1	1	1	1	

Donner l'expression de A.

REP. $A = c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

EX.8 Soit B de tableau de Karnaugh:

a\b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	1	
1	1	1	1	

Donner l'expression de B.

REP. $B = c + \bar{b}$

EX.9 Soit $E = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b}$

Donner son tableau de Karnaugh.

Comparer E et $B = c + \bar{b}$

REP. . Voire le tableau de l'ex. 8

SUJET 1 correction

(On a: $y + y.z = y$ et $y + \bar{y}.z = y + z$ où y, z sont des variables booléennes)

Un règlement administratif concerne certaines catégories d'individus.

Soit quatre variables booléennes h, a, s, r . On désigne par x un individu quelconque.

$h = 1$ si x est un homme sinon $h = 0$. (\bar{h})

$a = 1$ si x a au moins 50 ans sinon $a = 0$. (\bar{a})

$s = 1$ si x est salarié sinon $s = 0$. (\bar{s})

$r = 1$ si x est concerné par le règlement sinon $r = 0$.

Quels sont les individus x pour lesquels $h . \bar{a} = 1$?

On admet que $r = h . \bar{a} + \bar{s} . a + \bar{h} . (s + \bar{s} . \bar{a})$

Faire le tableau de Karnaugh de r .

$a \backslash h s$	00	01	11	10
0				
1				

En déduire une expression simplifiée de r .

.....

Quelle est la catégorie d'individus non concernés par le règlement?

.....

Par le calcul booléen montrer que $h . \bar{a} + \bar{s} . a + \bar{h} . (s + \bar{s} . \bar{a}) = \bar{a} + \bar{s} + \bar{h}$

$$. a + \bar{h} . (\bar{s} + \bar{s} . \bar{a}) = \bar{a} + \bar{s} + \bar{h}$$

Pour changer un parc informatique d'une société on définit les critères suivants:

a : Il y a un graveur DVD.

b : Il y a une imprimante.

c : Il y a un scanner.

On refuse d'avoir la configuration E consistant en

"un graveur sans scanner" ou " aucun graveur ni imprimante".

• Donnez l'expression de E.

E =

Donnez le tableau de Karnaugh de E.

a\b c	00	01	11	10
0				
1				

• Donnez la traduction française de l'expression $a \cdot \bar{b} \cdot c$.

• Soit F l'expression indiquant les configurations acceptées. Donnez l'expression

simplifiée de F obtenue à partir du tableau de Karnaugh.

" Avoir un graveur et un scanner " ou bien " avoir une imprimante et pas de graveur " traduit-il F ?

Soit l'expression booléenne $A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + b + \bar{b} \cdot c$

où a, b, c sont des variables booléennes.

Compléter le tableau de Karnaugh de A :

a\b c	00	01	11	10
0				
1				

En déduire l'expression simplifiée de A .

$A = \dots\dots\dots$

- Retrouver cette expression simplifiée de A par le calcul.

$$A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + b + \bar{b} \cdot c$$

$A = \dots\dots\dots$

$A =$

- Une centrale téléphonique d'une société de vente par correspondance reçoit des appels.

Pour chaque appel on considère:

$x = 1$ si une commande est passée. (Sinon $x = 0$)

$y = 1$ si une demande de catalogue est faite. (Sinon $y = 0$)

$z = 1$ si le service après-vente est sollicité. (Sinon $z = 0$)

Soit l'expression booléenne $B = x \cdot (\bar{y} + z) + \bar{x}$

- Donner le tableau de Karnaugh de B .

x\y z	00	01	11	10
0				
1				

Donner l'expression de \bar{B}

A quelle catégorie d'appel correspond, concrètement, \bar{B} ?

SUJET IV correction

Dans un magasin le service clientèle a organisé le repérage des clients qui entrent dans le magasin.

- Si le client achète un article alors il est considéré de la catégorie A. On écrit $a = 1$.
- Si le client demande un échange ou rend un article alors il est considéré de la catégorie R. On écrit $r = 1$.
- Si le client demande des renseignements sur les articles alors il est considéré de la catégorie P. On écrit $p = 1$.

Soit l'expression booléenne $E = a \cdot \bar{r} \cdot p + a \cdot \bar{r} \cdot \bar{p}$

- Que peut-on dire d'un client correspondant à E ?

Faire le tableau de Karnaugh de E.

a \ p r	00	01	11	10
0				
1				

- Trouver une forme simplifiée de E.
- Retrouver par le calcul cette forme simplifiée.
- Quel type de client correspond à \bar{E} ?
- Donner l'écriture la plus simple de \bar{E}

Sujet V correction

Soit $A = a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} b \bar{c} + \bar{a} \bar{b} c + a b \bar{c} + a \bar{b} c + \bar{a} b c$

1.a. Donnons le tableau de Karnaugh de l'expression A.

a\bc	00	01	11	10
0				
1				

Déduisons une simplification de A.

b. Retrouvons par le calcul ce résultat simplifié.

2. a. Calculons $(x \rightarrow 0)$. Par convention $(x \rightarrow y) = \bar{x} + y$

b. Montrer que $((x \rightarrow 0) \rightarrow y) = x + y$

Montrer que $(((x \rightarrow 0) \rightarrow y) \rightarrow 0) = \bar{x} \cdot \bar{y}$

c. Traduisons la forme simplifiée de A sans +, ., barre.

- Soit l'expression booléenne $E = \bar{a} \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$

a , b , c sont des variables booléennes.

- Faire le tableau de Karnaugh de E.

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1	1		1

- Simplifier E à l'aide du tableau de Karnaugh.

- $E = \bar{b} + \bar{c}$

Les deux premières colonnes pour \bar{b} .

La première colonne avec la dernière pour \bar{c}

- L'expression $\bar{c} + \bar{b}$ est-elle égale à E ? OUI

- On s'intéresse aux critères suivants pour une personne au chômage :

a : " Elle a au moins 45 ans".

b : " Elle est au chômage depuis au moins 1 an "

c : " Elle a déjà suivi une formation l'année précédente"

Une formation qualifiante est mise en place pour les personnes

qui correspondent à au moins l'une des situations ci-dessous :

" Avoir au moins 45 ans et être au chômage depuis moins de 1 an"

" Avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente"

" Être au chômage depuis au moins 1 an et ne pas avoir suivi de formation

L'année précédente"

- Donnez l'expression booléenne F qui traduit que la personne pourra suivre

une formation qualifiante.

$$F = \bar{a} \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b}$$

$$F = \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c \quad \text{ou encore} \quad F = \bar{c} + a \cdot \bar{b} .$$

Le tableau de Karnaugh de F est :

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1		1

- En déduire les personnes qui **ne** pourront **pas** suivre une formation qualifiante.

Il suffit de prendre les minterms qui ne sont pas pris pour F.

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	

On considère : $\bar{a} \cdot c + b \cdot c$

Cela se traduit par :

" Elle a moins de 45 ans et elle a déjà suivi une formation l'année précédente"

ou " elle est au chômage depuis au moins 1 an et elle a déjà suivi une formation l'année précédente"

• CORRECTION 2

Pour changer un parc informatique d'une société on définit les critères suivants:

a : Il y a un graveur DVD.

b : Il y a une imprimante.

c : Il y a un scanner.

On refuse d'avoir la configuration E consistant en

"un graveur sans scanner" ou " aucun graveur ni imprimante".

- Donnez l'expression de E.

$$E = a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b}$$

- Donnez le tableau de Karnaugh de E.

a\b c	00	01	11	10
0	1	1		
1	1			1

Donnez la traduction française de l'expression $a \cdot \bar{b} \cdot c$.

Il y a un graveur, pas d'imprimante et il y a un scanner

Soit F l'expression indiquant les configurations acceptées. Donnez l'expression simplifiée de F obtenue à partir du tableau de Karnaugh.

Les cases vierges du tableau de Karnaugh de E correspondent aux minterms de F.

Le tableau de Karnaugh de F est donc :

a\b c	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	

F est le contraire de E. Ainsi : $F = \bar{a} \cdot b + a \cdot c$

" Avoir un graveur et un scanner " ou bien " avoir une imprimante et pas de graveur " traduit-il F ?

OUI. C'est la traduction de $F = \bar{a} \cdot b + a \cdot c$

CORRECTION 3

Soit l'expression booléenne $A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + b + \bar{b} \cdot c$

où a , b , c sont des variables booléennes.

Compléter le tableau de Karnaugh de A:

a\b c	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

En déduire l'expression simplifiée de A.

$$A = a + \bar{a} = 1$$

Retrouver cette expression simplifiée de A par le calcul.

$$A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + b + \bar{b} \cdot c$$

$$A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + b + c$$

$$A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + b + c$$

$$A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + \bar{c} + b + c$$

$$A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + b + \bar{c} + c$$

$$A = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} + b + 1 = 1$$

• Un central téléphonique d'une société de vente par correspondance reçoit des appels. Pour chaque appel on considère:

$x = 1$ si une commande est passée. (Sinon $x = 0$)

$y = 1$ si une demande de catalogue est faite. (Sinon $y = 0$)

$z = 1$ si le service après-vente est sollicité. (Sinon $z = 0$)

Soit l'expression booléenne $B = x \cdot (\bar{y} + z) + \bar{x}$

Donner le tableau de Karnaugh de B.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	

Donner l'expression de \bar{B} $\bar{B} = x \cdot y \cdot \bar{z}$

A quelle catégorie d'appel correspond, concrètement, \bar{B} ?

"Une commande est passée et une demande de catalogue est faite mais

le service après vente n'est pas sollicité."

Dans un magasin le service clientèle a organisé le repérage des clients qui entrent dans le magasin.

- Si le client achète un article alors il est considéré de la catégorie A. On écrit $a = 1$.
 - Si le client demande un échange ou rend un article alors il est considéré de la catégorie R. On écrit $r = 1$.
- Si le client demande des renseignements sur les articles alors il est considéré de la catégorie P. On écrit $p = 1$.

Soit l'expression booléenne $E = a \cdot \bar{r} \cdot p + a \cdot \bar{r} \cdot \bar{p}$

- • Que peut-on dire d'un client correspondant à E ?

" Il achète un article sans demande d'échange et demande des renseignements" ou

" Il achète un article sans demande d'échange et ne demande pas de renseignement"

- Faire le tableau de Karnaugh de E.

a \ p r	00	01	11	10
0				
1	1			1

- Trouver une forme simplifiée de E. $E = a \cdot \bar{r}$

- Retrouver par le calcul cette forme simplifiée.

On : $E = a \cdot \bar{r} \cdot p + a \cdot \bar{r} \cdot \bar{p}$

C.-à-d. $E = a \cdot \bar{r} \cdot (p + \bar{p})$

C.-à-d. $E = a \cdot \bar{r} \cdot 1$

C.-à-d. $E = a \cdot \bar{r}$

- Quel type de client correspond à \bar{E} ?

On a: $\bar{E} = \bar{a} + a \cdot r$

En effet le tableau de Karnaugh de \bar{E} est

a \ pr	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1		1	1	

• Donner l'écriture la plus simple de \bar{E} .

On a : $\bar{E} = \bar{a} + a.r$

Donc $\bar{E} = \bar{a} + r$

CORRECTION S5

Soit $A = a.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$

1.a. Donnons le tableau de Karnaugh de l'expression A.

a\bc	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1			1

Déduisons une simplification de A.

$A = \bar{c} + \bar{a}.\bar{b}$

On pouvait aussi dire : $A = \bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c$

b. Retrouvons par le calcul ce résultat simplifié.

On a : $A = a.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$

C.-à-d. $A = b.\bar{c}.(a + \bar{a}) + \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{b}.\bar{c}.(a + \bar{a})$ par factorisation de $b.\bar{c}$

C.-à-d. $A = b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{b}.\bar{c}$ sachant $a + \bar{a} = 1$

C.-à-d. $A = \bar{c}.(b + \bar{b}) + \bar{a}.\bar{b}.c$ par factorisation de \bar{c} (c barre)

C.-à-d. $A = \bar{c}.(b + \bar{b}) + \bar{a}.\bar{b}.c$ sachant $b + \bar{b} = 1$

C.-à-d. $A = \bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c$

C.-à-d. $A = \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b}$ sachant $x + \bar{x} \cdot y = x + y$

($\bar{a} \cdot \bar{b}$ Joue le rôle de y \bar{c} joue le rôle de x)

Conclusion : On a retrouvé le résultat.

2. a. Calculons $(x \rightarrow 0)$. Par convention $(x \rightarrow y) = \bar{x} + y$

Ainsi : $(x \rightarrow 0) = \bar{x} + 0 = \bar{x}$

Donc $(x \rightarrow 0) = \bar{x}$ (c'est-à-dire x barre)

b. Montrons que $((x \rightarrow 0) \rightarrow y) = x + y$

On a : $((x \rightarrow 0) \rightarrow y) = (\bar{x} \rightarrow y) = x + y$ (x barre barre est x)

Donc : $((x \rightarrow 0) \rightarrow y) = x + y$

Montrons que $(((x \rightarrow 0) \rightarrow y) \rightarrow 0) = \bar{x} \cdot \bar{y}$

On a : $(((x \rightarrow 0) \rightarrow y) \rightarrow 0) = ((x + y) \rightarrow 0) = \bar{x} \cdot \bar{y} + 0 = \bar{x} \cdot \bar{y}$

(Loi de Morgan : $\overline{x+y}$ donne $\bar{x} \cdot \bar{y}$)

Donc $(((x \rightarrow 0) \rightarrow y) \rightarrow 0) = \bar{x} \cdot \bar{y}$

c. Traduisons la forme simplifiée de A sans + , . , barre.

A = $\bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b}$

Or $\bar{a} \cdot \bar{b} = (((a \rightarrow 0) \rightarrow b) \rightarrow 0)$

Donc $A = \bar{c} + (((a \rightarrow 0) \rightarrow b) \rightarrow 0) = (c \rightarrow (((a \rightarrow 0) \rightarrow b) \rightarrow 0))$

Conclusion : $A = (c \rightarrow (((a \rightarrow 0) \rightarrow b) \rightarrow 0))$

