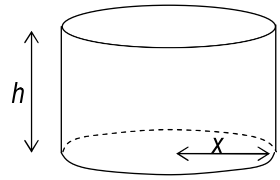
MPS – Du lait au yaourt

ACTIVITE 1 Mise en place du problème

On considère une boite fermée (avec couvercle) , de forme cylindrique, de hauteur h et dont le rayon de la base est x. Les dimensions données sont en cm.



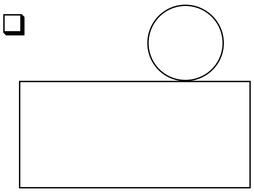
1/ Rappeler la formule donnant le volume de cette boite en fonction de π , h et x : $\boxed{V = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

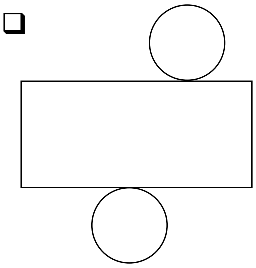
2/ a) Compléter la 3ème ligne du tableau suivant en donnant les résultats de calcul de volumes , à 0,1 près.

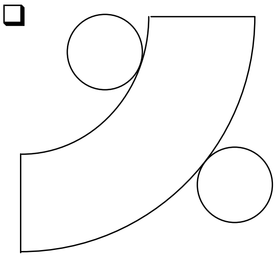
x	1,5	2	4,22	5,66
h	22,64	12,73	2,86	1,59
V				
A				

Que remarque-t-on ? ……

b) Parmi les trois dessins de " patrons " suivants, désigner celui pouvant correspondre à notre boite cylindrique avec couvercle. Légender alors la figure choisie avec les dimensions utiles au calcul de son aire en fonction de π , h et x.

❑ 

❑ 

❑ 

En déduire l'aire globale de la boite cylindrique (aire du dessus, du fond et latérale) en fonction de π , h et x :

$\boxed{A (x , h) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

c) Compléter la dernière ligne du tableau (question 2/ a)) en donnant les résultats de calcul d'aires globales , à 0,1 près.
Les calculs font-ils état de résultats identiques pour l'aire globale ? ………

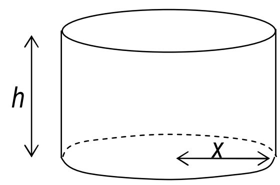
3/ *Exposé du problème* :
La boite cylindrique ainsi étudiée représente en réalité un pot de yaourt.
Pour des raisons liées au conditionnement, le volume de ce pot de yaourt est imposé égal à $V = 160$ cm^3 . Cela correspond aux 125 g de marchandise (yaourt), plus un vide d'air au dessus.

Pour des raisons financières (réduction des coûts de fabrication), on souhaite connaître les dimensions de ce pot de yaourt amenant une aire globale MINIMALE (= quantité de matières premières minimale, pour la réalisation de ce pot), tout en disposant d'un pot de 160 cm^3 .

C'est le but de cette activité !

ACTIVITE 2 Mise en équation

On considère toujours le cylindre de hauteur h et dont le rayon de la base est x.
Les dimensions données sont en cm.
On rappelle que le volume de ce cylindre est fixé et égal à $V = 160$ cm^3 .



1/ En utilisant la formule du volume de ce cylindre et en considérant que $V = 160$, exprimer h en fonction de π et x :

……

…… $\boxed{h = \quad}$

2/ Exprimer alors l'aire globale *A* (*x*) de la boite cylindrique , UNIQUEMENT en fonction de *x* (Utiliser la formule établie dans l'activité précédente, question 2/ b)):

……

…… *A* (*x*) =

3/ Remplacer *x* par 1,5 dans la formule précédente de l'aire (encadrée), et effectuer le calcul. Retrouve-t-on le résultat trouvé pour *A* dans la première colonne du tableau (Activité 1) ? ………

ACTIVITE 3 Recherche de la solution du problème, à l'aide de la calculatrice, puis de Géogébra

PARTIE A AVEC LA CALCULATRICE

1/ - Se placer dans le MENU TABLE
- Ecrire dans Y1 la formule de l'aire globale en fonction de X. (cf formule encadrée ci-dessus)
- Appeler la fonction SET (touche F5) et compléter ainsi : X Start : 0 ; X End : 9 ; X Step : 1 , puis EXE.
- Appeler la fonction TABL (touche F6) :
Le tableau de valeurs apparaît, donnant pour chacune des valeurs de x prédéfinies, la valeur de l'aire globale correspondante.
Compléter alors le tableau ci-dessous, en recopiant les résultats de la calculatrice :

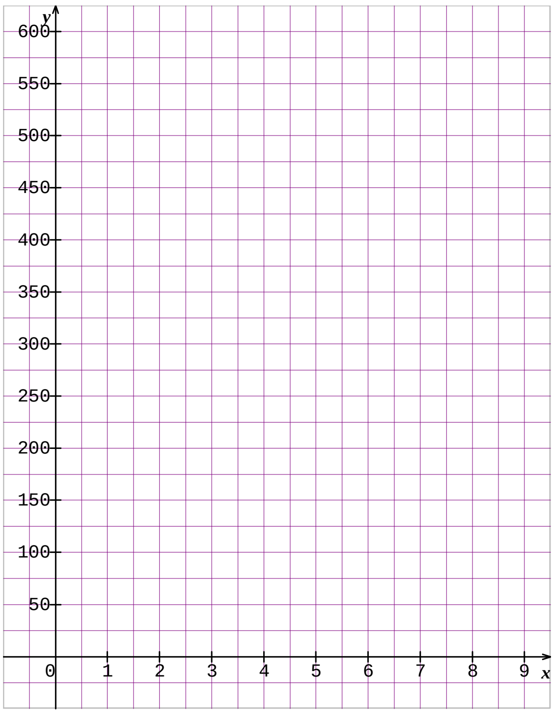
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A (*x*)										

En examinant ce tableau, pour quelle valeur de *x*, l'aire globale est-elle minimale ? *x* = ………

2/ Nous allons déterminer une valeur plus précise de *x*. Pour cela, nous allons recourir au graphique.

a) *A la main* :
Représenter sur le repère ci-contre les 10 points dont les coordonnées sont *x* pour les abscisses et *A* (*x*) pour les ordonnées.
Rejoindre les 10 points ainsi représentés, de façon harmonieuse, main levée et sans utiliser la règle.

b) *A la calculatrice* :
- Se placer dans le MENU GRAPH
- Dans Y1 est conservée la formule de l'aire globale en fonction de X.
- Appeler la fonction V-WINDOW (Shift F3) et compléter ainsi :
X min : 0 ; X max : 9 ; X scale : 1 ,
Y min : 0 ; Y max : 600 ; Y scale : 100, puis EXE.
- Appeler la fonction DRAW (touche F6) :
La courbe se dessine.



Méthode 1 de recherche de minimum :
- La courbe étant affichée à l'écran, appeler la fonction Trace (Shift F1).
- A l'aide des touches de déplacement ◀ et ▶, faire bouger le curseur sur la courbe. Les coordonnées du point sont données en dessous de la courbe. Déterminer les coordonnées du point amenant l'aire minimale.
x = ………… et *y* = ………… (conserver 2 chiffres après la virgule).

Méthode 2 de recherche de minimum :
- La courbe est affichée à l'écran. A l'aide des touches de déplacement ◀ et ▶, faire bouger le curseur sur la courbe, afin de le placer en dehors du " sommet " de la courbe.
- Appeler la fonction G-Solv (Shift F5).Puis, appeler la fonction MIN (touche F3)
Les coordonnées du point amenant l'aire minimale, sont affichées automatiquement. La calculatrice donne :
x = ………… et *y* = ………… (conserver 2 chiffres après la virgule).

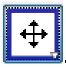
En considérant la valeur approchée de x trouvée lors de cette 2ème méthode, calculer les dimensions du pot de yaourt amenant une utilisation de matières premières (plastique, …) minimale :

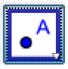
x = ……….. et h = ………….. (cf formule établie dans l'activité 2, question 1)

Comparer avec les dimensions réelles d'un pot de yaourt classique. Commentaires : ……………………………………………

PARTIE B AVEC GEOGEBRA

Lancer Géogébra.
Dans la ligne de saisie (en bas de l'écran), taper : A(x)=2π*x²+320/x , puis Entrée.
(π s'obtient en cliquant sur le pointeur d'accès au menu déroulant  , puis en sélectionnant le symbole π).

Sélectionner l'icône .
Maintenir le clic n'importe où sur la fenêtre graphique, puis déplacer le repère (origine en bas, à gauche).
Maintenir ensuite le clic n'importe où sur l'axe des ordonnées (en haut de la fenêtre graphique), puis réduire l'échelle graphique, en déplaçant le pointeur de la souris vers le bas. S'y reprendre à plusieurs fois éventuellement. Faire ainsi apparaître la courbe représentant A, et faire varier y entre 0 et 600 environ. Faire de même pour l'axe des abscisses, pour faire varier x entre 0 et 9 environ.

Sélectionner l'icône  , puis cliquer n'importe où sur la courbe représentant A. Un point B apparaît sur la courbe. Ses coordonnées apparaissent dans la fenêtre " Algèbre ".
Soyons plus précis concernant les chiffres après la virgule : Cliquer sur Options, puis sur Arrondi, et sélectionner 5 décimales.

Sélectionner l'icône  , puis cliquer sur le point B dans la fenêtre " Algèbre ", afin de le sélectionner. Le point B se met en surbrillance.
Faire varier la position de B, à l'aide des touches de déplacement $\rightarrow$ et $\leftarrow$ de l'ordinateur.

Faisons bouger B " plus doucement " : Le point B étant sélectionné (dans la fenêtre " Algèbre ", surbrillance), cliquer sur Editer, puis sur Propriétés … Choisir l'étiquette " Algèbre " , puis indiquer 0.01 pour l'incrément. Puis, Fermer.

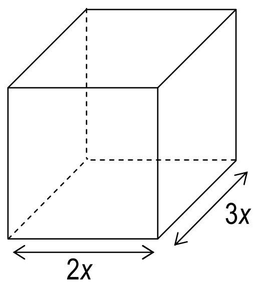
A nouveau, cliquer sur le point B dans la fenêtre " Algèbre ", afin de le sélectionner. Le point B se met en surbrillance.
Faire varier la position de B, à l'aide des touches de déplacement $\rightarrow$ et $\leftarrow$ de l'ordinateur. En examinant l'ordonnée du point B dans la fenêtre " Algèbre ", déterminer la valeur de x (abscisse de B) qui amène une aire A minimale (ordonnée de B).

x = ………..   Aire minimale = ………..   (conserver 2 chiffres après la virgule)

Trouve-t-on le même résultat qu'avec la calculatrice ? ………

ACTIVITE 4   Travail en autonomie : Etude d'un autre cas (Groupes de 4 élèves)

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de contenants alimentaires souhaite mettre sur le marché un nouvel emballage pour yaourt. Celui-ci a la forme d'un pavé droit dont la base est un rectangle de dimensions $2x$ et $3x$.



On impose à ce contenant un volume fixé et égal à 200 cm^3.

Déterminer les dimensions (longueur, largeur, hauteur) de cette boite amenant une aire globale minimale (quantité de matières premières minimale = minimisation des coûts de production).

Une rédaction est imposée, exposant la démarche, présentant les calculs nécessaires (sur copie). Par ailleurs, envoyer le fichier géogébra, ayant permis la résolution du problème, à l'adresse terms1.stsau@voila.fr . Le nommer à l'aide de vos noms de famille.