Exercice 1

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes.
Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier , leur diamètre est exprimé en millimètres.
Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle [89,6; 90,4].

1° On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart type $\sigma = 0{,}17$.
Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2° L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre.
On suppose que la variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart type σ_1.
Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à 0,99.

B. *Loi binomiale* Arrondir à 10^{-3}.

On note E l'événement : « une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux ».
On suppose que P(E) = 0,02. On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre.
Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.
On considère la variable aléatoire Y_1 qui, à tout prélèvement de quatre rondelles, associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1° Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2° Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux .
3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les rondelles sont commercialisées par lots de 1000. On prélève au hasard un lot de 1000 rondelles dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 rondelles. On considère la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1000 rondelles.
On admet que la variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres n = 1 000 et p = 0,2.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire par la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 4,43.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 4,43.

1° Justifier les paramètres de cette loi normale.
2° Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1000 rondelles, c'est-à-dire calculer $p(Z \leq 15{,}5)$.

Exercice 2

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Une entreprise fabrique. en grande quantité des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimées en millimètres. Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

Une tige de ce type est considérée comme conforme pour la longueur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [99,45; 100,55]. On note X la variable aléatoire qui. à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,25.

1° Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2° Déterminer le nombre réel h positif tel que : $p(100 - h \leq X \leq 100 + h) = 0{,}95$.
Interpréter le résultat à l' aide d'une phrase.

B. *Loi binomiale et loi de Poisson*

Dans un lot de ce type de tiges 3 % des tiges ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification de la longueur .Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tiges. On considère la variable aléatoire y qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur

1° Justifier que la variable aléatoire y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur
3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur
4° On considère que la loi suivie par y peut être approchée par une loi de Poisson.
Déterminer le paramètre À de cette loi de Poisson.
5° On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ a la valeur obtenue au 4°.
Calculer P(Z = 2) et P(Z < 2).

Exercice 1

1. On cherche $p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4)$ .La variable aléatoire X_1 suit la loi normale N $(90;0,17)$ donc la variable aléatoire $T_1 = \frac{X_1 - 90}{0,17}$ suit la loi normale réduite N $(0;1)$.

$$p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = p\left(\frac{89,6-90}{0,17} \leq T_1 \leq \frac{90,4-90}{0,17}\right)$$

$p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = p\left(-\frac{0,4}{0,17} \leq T_1 \leq \frac{0,4}{0,17}\right)$; pour tout réel positif t : $\pi(-t) = 1 - \pi(t)$.

$$p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = \pi\left(\frac{0,4}{0,17}\right) - \pi\left(-\frac{0,4}{0,17}\right) = 2\pi\left(\frac{0,4}{0,17}\right) - 1 = 2\pi(2,35) - 1.$$

La table de la loi normale du formulaire donne : $\pi(2,35) = 0,9906$ d'où $p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) \approx 0,9812$.

2. La variable aléatoire D suit la loi normale N $(90;\sigma_1)$ donc la variable aléatoire $T_2 = \frac{D-90}{\sigma_1}$ suit la loi normale réduite N $(0;1)$ .On cherche σ_1 pour que $p(89,6 \leq D \leq 90,4) = 0,99$. Ce qui est équivalent à : $p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = p\left(\frac{89,6-90}{\sigma_1} \leq \frac{D-90}{\sigma_1} \leq \frac{90,4-90}{\sigma_1}\right) = 0,99$. $p\left(-\frac{0,4}{\sigma_1} \leq T_2 \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99$;

$\pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - \pi\left(-\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 2\pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$; $\pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = \frac{1,99}{2} = 0,995$ .la table de la loi normale du formule

Donne : $\pi(2,58) \approx 0,995$, d'où $\frac{0,4}{\sigma_1} = 2,58$, $\sigma_1 = 0,16$.

***B*. chaque prélèvement est constitué par quatre épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est associé à un tirage avec remise . Chaque épreuve peut déboucher sur deux résultats , et deux seulement , la rondelle n'est pas conforme , événement de probabilité** $p = 0,02$ **et la rondelle est pas conforme événement de probabilité** $p = 0,98$

donc la variable aléatoire Y_1 **suit la loi binomiale** B $(4;0,02)$.

2°.On cherche $p(Y_1 = 0)$: $p(Y_1 = 0) = C_4^0(0,02)^0(0,98)^4 \approx 0,922$.
Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale B $(n;p)$, $p(X = k) = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}$.

3.On cherche $p(Y_1 \leq 1)$: $p(Y_1 \leq 1) = p((Y_1 = 0) \cup (Y_1 = 1))$, les deux événements $(Y_1 = 0)$ *et* $(Y_1 = 1)$ sont incompatibles donc $p(Y_1 \leq 1) = p(Y_1 = 0) + p(Y_1 = 1) = (0,98)^4 + C_4^1(0,02)^1(0,98)^3 \approx 0,998$.

C. On sait que , lorsque certaines conditions sont remplies , la loi binomiale B $(n;p)$ peut être approchée

Par la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ avec $m=np$ et $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$.

Or $n=1000$ et $p=0,02$, on obtient $m=np=1000\times0,02=20$ et $\sigma=\sqrt{20(1-0,02)}=\sqrt{20\times0,98}\approx4,43$.

2. On cherche $p(Z\le15,5)$ .la variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(20;4,43)$, donc la variable aléatoire $T=\dfrac{Z-20}{4,43}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$p(Z\le15,5)=p\left(\dfrac{Z-20}{4,43}\le\dfrac{15,5-20}{4,43}\right)=p\left(T\le-\dfrac{4,5}{4,43}\right)=\pi\left(-\dfrac{4,5}{4,43}\right)$, pour tout nombre réel $t>0$

$\pi(-t)=1-\pi(t)$, donc $p(Z\le15,5)=\pi\left(-\dfrac{4,5}{4,43}\right)=1-\pi\left(\dfrac{4,5}{4,43}\right)=1-\pi(1,06)$.

La table de la loi normale du formulaire donne $\pi(1,06)=0,8554$, d'où $p(Z\le15,5)\approx0,1446$, en arrondissant à 10^{-2}, on obtient : $p(Z\le15,5)\approx0,15$.

Exercice 2

Partie A :

1. On cherche $p(99,45\le X_1\le100,55)$. La variable aléatoire X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(100;0,25)$ donc la variable aléatoire $T=\dfrac{X-100}{0,25}$ suit la loi normale réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Notons E l'évènement : E : " la tige est conforme "

$$p(E)=p(99,45\le X\le100,55)=p\left(\frac{99,45-100}{0,25}\le T\le\frac{100,55-100}{0,25}\right)=p\left(-2,2\le T\le2,2\right)=2\pi(2,2)-1.$$

(par symétrie de la loi normale centrée réduite N(0,1). sur la table de la loi normale centrée réduit on lit : $\pi(2,2)=0,9861$. $p\left(E\right)=2\times0,9861-1\approx0,97$.

La probabilité qu'une tige tirée au hasard soit conforme est donc égale à 0,97.

2.

$$p(100-h\le X\le100+h)=0,95\Leftrightarrow p\left(\frac{-h}{0,25}\le\frac{X-100}{0,25}\le\frac{h}{0,25}\right)=0,95\Leftrightarrow p\left(\frac{-h}{0,25}\le T\le\frac{h}{0,25}\right)=0,95$$

$\Leftrightarrow 2\pi\left(\dfrac{h}{0,25}\right)-1=0,95\Leftrightarrow\pi\left(\dfrac{h}{0,25}\right)=0,975$. Sur la table on lit $\dfrac{h}{0,25}=1,96$, d'où $h=0,49$

si on tire au hasard un tige , il y a 95 % de chance que sa longueur soit comprise en $100-0,49$ et $100+0,49$

Partie B :

1. On assimile ce prélèvement de 50 tiges à un tirage aléatoire avec remise , répété 50 fois. Les expériences sont indépendantes et il n'y a que deux issues observées : non conformes ou conformes, la probabilité qu'une tige soit non conforme est de : 0,03 . On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernouilli et la variable Y suit la loi B(50 ; 0,03).

2. On cherche $p(Y=2)$: $p(Y=2)=C_{50}^{2}(0,03)^2(0,97)^{48}\approx0,26$.

Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, $p(X=k)=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k}$.

3. On cherche $p(X\le2)$: $p(Y=0)=C_{50}^{0}(0,03)^0(0,97)^{50}=(0,97)^{50}$.

$p(Z\le2)=p((X=0)\cup(X=1)\cup(X=2))$, les deux événements $(X=0)$; $(X=1)$ et $(X=2)$ sont incompatibles donc

$p(Z \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = (0,98)^{50} + C_{50}^{1}(0,02)^{1}(0,98)^{49} + C_{50}^{1}(0,02)^{2}(0,9)^{48} \approx 0,81$.

La probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur est de 0,81.

4. Z peut donc être approchée par une loi de poisson de paramètre $\lambda = 50 \times 0,03$ soit $\lambda = 1,5$.

5. $p(Z = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$. $p(Z = 2) = \dfrac{e^{-1,5}(1,5)^{2}}{2!} \approx 0,251$

$$p(Z \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{e^{-1,5}(1,5)^{0}}{0!} + \frac{e^{-1,5}(1,5)^{1}}{1!} + \frac{e^{-1,5}(1,5)^{2}}{2!} = 0,223 + 0,335 + 0,251 = 0,809$$

Ces résultats correspondent bien à l'approximation faite sur la loi binomiale.