**III- Dérivées usuelles** *feuille n°3*

***Définition 1 :*** *Fonction dérivée*

*Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition. Alors la fonction qui à x associe f′(x), notée f′, est appelée fonction dérivée de f sur I.*

*Dérivées de quelques fonctions usuelles*

*Nous admettons les résultats énoncés ci-dessous.*

©

| Fonction | | Dérivée | |
|---|---|---|---|
| Domaine | Expression | Domaine | Expression |
| IR | $f(x)=k$ | R | $f'(x)=0$ |
| IR | $f(x)=x^n$ | R | $f'(x)=n\,x^{n-1}$ |
| $IR^+$ | $f(x)=\sqrt{x}$ | $R_+^*$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $IR^*$ | $f(x)=\frac{1}{x}$ | $IR^*$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ |

*Exemple :* *Soit f la fonction constante défini par $f(x) = 4$. Alors pour tout réel x, $f'(x) = 0$.*
*Soit g la fonction définie sur R par $f(x) = x^3$ donc pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2$*

## 1. Opérations sur les fonctions dérivables

### a. Dérivée de u + v

*Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.*
*La dérivée de la somme, notée (u+ v)′, est égale à la somme des dérivées, notée u′ + v′.*

$$(u+v)' = u' + v'$$

*Cas particulier : Toute fonction polynôme est dérivable sur R.*

### b. Dérivée de u × v

*Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.*
*La dérivée du produit, notée (u v)′, est égale à :*

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v' = u\,v' + u'\,v$$

*Cas particulier : la dérivée de la fonction ku, notée (ku)′, est ku′.*

### c. ***Dérivée de*** $\frac{1}{v}$

| |
|---|
| *Soit $v$ une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout $x$, $v(x) \neq 0$. Alors la fonction* $\frac{1}{v}$ *est dérivable sur I et :* $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ |

### d. ***Dérivée de*** $\frac{u}{v}$

| |
|---|
| *Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Et pour tout $x$, $v(x) \neq 0$. Alors la fonction quotient* $\frac{u}{v}$ *est dérivable sur I et :* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |

**e. *Cas usuels :*** *Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout ensemble inclus dans son ensemble de définition.*

## 2. ***Signe de la dérivée et sens de variation***

***Théorème fondamental :***

*f est un fonction dérivable sur un intervalle I*

- *Lorsque f′ est positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement croissante sur I.*
- *Lorsque f′ est négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement décroissante sur I.*
- *Lorsque f′ est nulle sur I, f est constante sur I.*
- *De plus, si I = [a;b] et si f′ est strictement positive ( resp. négative) sut ]a; b[ , alors f est strictement croissante ( resp. décroissante ) sur [a; b].*

*Exemple :* *Nous avons vu que la dérivée de la fonction carré est la fonction définie sur R par*

*$f'(x) = 2x$.      Le signe de $2x$ est donné par le tableau ci-dessous :*

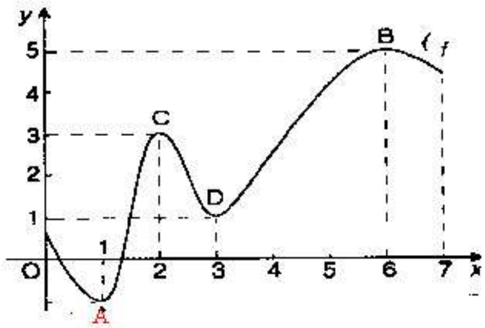
| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe ($2x$) | | $-$ | 0 | $+$ | |

*Il en résulte que la fonction carrée est strictement croissante sur IR+ et strictement décroissante sur IR-*

® *Le commentaire d'un tableau de variations est attendu lors de l'énoncé suivant : «  Donner les variations de la fonction …»*

## III- Extremum local et dérivée

***Définition*** : *Extremum local*

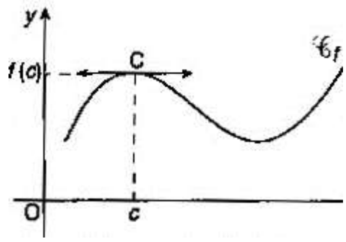



On appelle extremum local un maximum local ou un minimum local.
Dire que la fonction $f$ admet un extremum local en $c$ signifie que $f(c)$ est un extremum de $f$ restreinte à un intervalle ouvert contenant $c$.

Le point C est un le point le plus haut de la courbe sur [0;4].

On dit que $f$ admet un maximum local en 2 et que ce maximum local est $f(2) = 3$. Que dire de A et D ?

**Théorème (admis)**




$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
**Si** $f$ admet un extremum local en $c$ **alors** $f'(c)=0$.

*Attention, la réciproque est fausse : contre-exemple : la fonction cube est telle que sa dérivée s'annule en 0. Mais f(0) n'est pas un extremum. Vous pourrez le démontrer !*

*Conséquence graphique :* La courbe $C_f$ a une tangente horizontale au point ( $c; f(c)$ ).
En effet, en ce point C, le coefficient directeur de la tangente est nul car $f'(c)=0$.

*Fiche 1 : Les dérivées usuelles*

*Toute fonction usuelle est dérivable sur son ensemble de définition.*
*Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout ensemble inclus dans son ensemble de définition.*

## *I. Fonctions usuelles*

| *Fonction* | | *Dérivée* | |
|---|---|---|---|
| *Domaine* | *Expression* | *Domaine* | *Expression* |
| IR | $f(x)= k$ | IR | $f'(x) = 0$ |
| IR | $f(x) = ax + b$ | IR | $f(x) = a$ |
| IR | $f(x) = x^2$ | IR | $f'(x) = 2x$ |
| IR | $f(x) = x^3$ | IR | $f'(x) = 3x^2$ |
| IR | $f(x) = x^n$ | IR | $f'(x) = n\,x^{n-1}$ |
| IR * | $f(x) = \frac{1}{x}$ | IR * | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $IR_+$ | $f(x)= \sqrt{x}$ | $IR_+$ * | $f'(x)= \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $R_+$ * | $f(x) = \ln x$ | $IR_+$ * | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| R | $f(x) = e^x$ | IR | $f'(x) = e^x$ |

## *II. Formes usuelles*

- *Dérivée d'une somme (d'une différence) :* $(u + v)' = u' + v'$
- *Dérivée d'un produit :* $(u\,v)' = u'\,v + u\,v' = u\,v' + u'\,v$
- *Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante:* $(ku)' = ku'$
- *Dérivée d'un quotient :* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- *Dérivée d'une composée :* $(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$

## *III. Compositions usuelles*

| *Fonction* | | *Dérivée* | |
|---|---|---|---|
| *Domaine* | *Expression* | *Domaine* | *Expression* |
| $u(x) \in IR$ | $f(x) = (u(x))^2$ | $u(x) \in IR$ | $f(x) = 2u(x) \times u'(x)$ |
| $u(x) \in IR$ | $f(x) = (u(x))^3$ | $u(x) \in IR$ | $f(x) = 3u^2(x) \times u'(x)$ |
| $u(x) \in IR$ | $f(x) = (u(x))^n$ | $u(x) \in IR$ | $f(x) = nu^{n-1}(x) \times u'(x)$ |
| $u(x) \neq 0$ | $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ | $u(x) \neq 0$ | $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ |
| $u(x) \geq 0$ | $f(x) = \sqrt{u(x)}$ | $u(x) > 0$ | $f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ |
| $u(x) \in IR$ | $f(x) = e^{u(x)}$ | $u(x) \in IR$ | $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ |
| $u(x) > 0$ | $f(x) = \ln u(x)$ | $u(x) > 0$ | $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ |