Partie 2 : Algèbre de Boole

Prérequis

- Éléments de logique
- Notions sur les ensembles

Objectifs

- Effectuer des calculs permettant de simplifier des expressions booléennes

Plan du cours

1. Définitions – Propriétés

Définitions

On considère un ensemble B muni de deux opérations que nous noterons pour cette définition + et .

On dira que le triplet (B, +, .) constitue une **algèbre de Boole** si, quels que soient les éléments a, b, c de B les opérations vérifient les propriétés suivantes :

1) $a + b \in$ B et $a.b \in$ B (on dit que + et . sont deux lois de **composition interne**) ;

2) chaque opération admet un élément unique noté respectivement 0 et 1, appelé élément neutre, vérifiant :

$$a + 0 = 0 + a = a \quad ; \quad a.1 = 1.a = a$$

3) $a + b = b + a$ *et* $a.b = b.a$ (on dit que les opérations + et. sont **commutatives**) ;

4) chacune des opérations est **distributive** par rapport à l'autre :

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$
$$a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$

5) tout élément a admet un élément unique noté $\overline{a}$, appelé **complémentaire** de a, vérifiant :

$a\,.\,\overline{a} = 0 \quad ; \quad a + \overline{a} = 1$

Le produit booléen $a.b$ est encore noté ab et les éléments de B sont appelés **variables booléennes.**

Propriété 1 (Associativité)

Si a, b et c sont des variables booléennes alors :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a.(b.c) = (a.b).c$$

Les opérations + et . sont dites **associatives** et l'on peut donc écrire les expressions précédentes sans parenthèse :

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$
$$a.(b.c) = (a.b).c = abc$$

Exercice 1

Exemples d'algèbre de Boole:

1. Soit B = {0 ; 1} muni des deux opérations notées + et . définies par leur table de Pythagore :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Alors (B, +, .) est une algèbre de Boole. On note pour les **complémentaires** que $\overline{1} = 0$ et $\overline{0} = 1$.

2. Si E est un ensemble et $\mathcal{P}$ (E) l'ensemble de ses parties alors ($\mathcal{P}$ (E), $\cap$, $\cup$) et ($\mathcal{P}$ (E), $\cup$, $\cap$) sont aussi des algèbres de Boole.

Définition:1

Soit B une algèbre de Boole.

On appelle **fonction booléenne** de n variables $a_1, a_2, \ldots, a_n$ toute application

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathrm{B}^n & \to & \mathrm{B} \\ & (a_1\,;a_2\,;a_3\,;\ \ldots\ ;\ a_n) & \mapsto & f(a_1\,;a_2\,;a_3\,;\ \ldots\ ;\ a_n) \end{array}$$

Exemples

1) $\begin{cases} f:\mathrm{B}^2 \to \mathrm{B} \\ (a\,;b) \mapsto f(a\,;b) = \overline{a}\ \overline{b} \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} f:\mathrm{B}^3 \to \mathrm{B} \\ (a\,;b\,;c) \mapsto f(a\,;b\,;c) = ab + \overline{a}\ \overline{b} + \overline{a}\ \overline{c} + \overline{b}\ c \end{cases}$

Les expressions booléennes (expressions faisant intervenir des variables booléennes et les lois de composition + et .) peuvent dans de nombreux cas être simplifiées. Pour cela, outre les propriétés qui définissent une algèbre de Boole (B, +, .) on utilise pour leur simplification les propriétés suivantes :

Propriété 2 Idempotence – Éléments absorbants

Si a est une variable booléenne alors :

$a + a = a$; $a\,.\,a = a$ (idempotence)

$a + 1 = 1$; $a\,.\,0 = 0$

(On dit que 1 est **élément absorbant** pour + et que 0 est **élément absorbant** pour.)

En effet :

- $a = a + 0 = a + (a.\overline{a}) = (a + a)\,.\,(a + \overline{a})$ (distributivité de + par rapport à .).
  D'où $a = (a + a).1 = a + a$.
- $a + 1 = a + (a + \overline{a}) = (a + a) + \overline{a} = a + \overline{a} = 1$.
- $aa = aa + 0 = a.a + a.\overline{a} = a.\ (a + \overline{a}) = a.1 = a$.
- $a.0 = a\,.(a\,.\,\overline{a}) = (a\,.\,a).\,\overline{a} = a.\overline{a} = 0$.

Exemples

Soient $\mathrm{A} = b.(a + b).a$; $\mathrm{B} = ab.\ (\overline{a} + bc)$ et $\mathrm{C} = (a + b)(a + c)$.

$\mathrm{A} = b.(a + b).a = b.a.\ (a + b) = b.a.a + b.a.b = b.a.a + b.b.a$
$= b.a + b.a = b.a$ (par idempotence).

$\mathrm{B} = ab.\ (\overline{a} + bc) = ab\overline{a} + abbc$.
$= a\,\overline{a}\,b + abbc = 0 + a.b.c$ (car $a\overline{a} = 0$ et $bb = b$)
$= abc$.

$$
\begin{aligned}
C &= (a + b)(a + c) \\
&= aa + ac + ba + bc \ (\textit{par distributivité}) \\
&= a + ac + ba + bc \ (\textit{car } aa = a) \\
&= a.(1 + c + b) + bc \\
&= a.1 + bc \ (\text{car 1 est élément absorbant pour } +) \\
&= a + bc.
\end{aligned}
$$

Exercice 2

Propriété 3

Si a est une variable booléenne alors il n'éxiste qu'une seule variable booléenne x vérifiant :

$a + x = 1$ et $a.x = 0$: c'est la variable $\overline{a}$

Propriété 4

Si a est une variable booléenne, $\overline{a}$ son complémentaire et $\overline{\overline{a}}$ le complémentaire de $\overline{a}$, alors :

$$\overline{\overline{a}} = a.$$

En effet : $\overline{a}$ et $\overline{\overline{a}}$ sont complémentaires, donc $\overline{a} + \overline{\overline{a}} = 1$ et $\overline{a}.\ \overline{\overline{a}} = 0$

or $\overline{a} + a = 1$ et $\overline{a}.a = 0$

d'où $\overline{\overline{a}} = a$ en appliquant la propriété 3.

Exemple

Le complémentaire de $\overline{ab + c}$ est $ab + c$.

Propriété 5 : régle de De Morgan

Si a et b sont deux variables booléennes, $\overline{a}$ et $\overline{b}$ leurs complémentaires, alors :

$\overline{a + b} = \overline{a}\,.\overline{b}$ et $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$

En effet :

$(a + b) + (\overline{a}\,.\overline{b}) = (a + b + \overline{a}).\ (a + b + \overline{b}) = (1 + b).\ (1 + a) = 1.\ 1 = 1$

et $(a + b).\ (\overline{a}\,.\overline{b}) = (\overline{a}\,.\overline{b}\,.\ a) + (\overline{a}\,.\overline{b}\,.\ b) = 0 + 0 = 0$

donc $(a+b)$ et $\overline{a}\,.\overline{b}$ sont complémentaires.

D'où $\overline{a + b} = \overline{a}\,.\overline{b}$ et $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$ en appliquant la propriété 4.

Exemple

$\overline{ab + c} = \overline{a.b}\,.\,\bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}).\bar{c} = \bar{a}.\bar{c} + \bar{b}.\bar{c}$

Exercice 3

Propriété 6 - Règle d'absorption

Si a et b sont des variables booléennes alors :

$$a + \bar{a}\,.b = a + b$$

En effet :

$a + \bar{a}\,.b = (a + \bar{a})\ (a+b)$ (distributivité de + par rapport à .)

$= 1.(a + b) = a + b$

Exemples

Si A = $\bar{b} + bc$ alors A = $\bar{b} + c$

Si B = $\bar{a}bc + ac$ alors B = $c(a+\bar{a}b) = c(a+b) = cb + ca = ac + bc$

Exercice 4

Remarque

De : 1 + 0 = 1 et 1.0 = 0, on déduit de la propriété 3 que :

$$\bar{1} = 0 \text{ et } \bar{0} = 1$$

Définition:2

Un minterme de n variables booléennes est un produit comportant n facteurs,chaque facteur correspondant à une variable donnée ou à son complémentaire.
Un maxterme de n variables est une somme comportant n termes, chaque terme correspondant à une variable donnée ou à sa complémentaire
Exemple: Soit a,b,c et d quatres variables booléennes:
abc

Définition:3

On appelle **forme canonique disjonctive** de la fonction f son écriture sous forme de somme de mintermes (**cette décomposition est unique**).

Exemple

$f(a\,;b) = ab + \bar{a}\,\bar{b}$ est sous forme canonique disjonctive, mais $g(a\,;b) = a + \bar{a}b$ ne l'est pas. Sa forme canonique disjonctive est $g(a\,;b) = ab + a\bar{b} + \bar{a}b$.

2. Représentation des fonctions booléennes

A. Représentation des fonctions booléennes à 2 variables

Les fonctions booléennes de 2 variables a et b sont représentées par le tableau ci-des-sous appelé tableau de Karnaugh. Chaque case représente un produit des variables a, b ou de leur complémentaire et chacun de ces produits est appelé un **minterme**.
Pour une fonction de 2 variables ils sont au nombre de 4.

a \ b	0	1
0	$\bar{a}\,\bar{b}$	$\bar{a}.b$
1	$a.\bar{b}$	ab

Pour représenter une fonction f, on met en évidence les mintermes composant f en notant 1 dans les cases pour lesquelles $f = 1$.

Exemple 1
Pour $f(a\,;b) = ab + \bar{a}\bar{b}$, on a :

a \ b	0	1
0	1	
1		1

$ab + \bar{a}\bar{b}$

Exemple 2
Pour $g(a\,;b) = a + \bar{a}b$, on a :

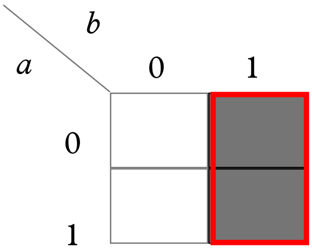
a \ b	0	1
0		1
1	1	1

$a + \bar{a}b$

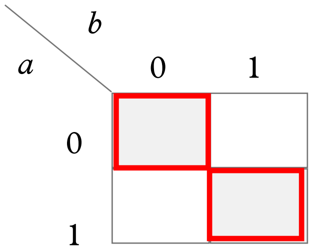
a est représenté par 2 cases adjacentes ($a\bar{b}$ et ab).

Remarque

Lorsque l'on passe d'une case à une autre case du tableau, et si une des variables seulement change d'état, les cases correspondantes sont dites **adjacentes**. Par exemple, les cases correspondant aux mintermes ab et $\overline{a}b$ sont adjacentes mais les cases correspondant aux mintermes ab et $\overline{a}\,\overline{b}$ ne le sont pas.



Cases adjacentes



Cases non adjacentes

B. Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

• **Représentation d'une variable et de son complémentaire**

Représentation de a

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

Représentation de b

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1			1	1

Représentation de c

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

Représentation de $\overline{a}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

Représentation de $\overline{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

Représentation de $\bar{c}$

- **Représentation des produits de 2 variables ou leurs complémentaires**

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	1

Représentation de ab

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		1	1	

Représentation de ac

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1			1	

Représentation de bc

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1				

Représentation de $\bar{a}b$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1	1		

Représentation de $a\bar{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1		1		

Représentation de $\bar{b}c$

a \ bc	00	01	11	10
0				1
1				1

Représentation de $b\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1		
1				

Représentation de $\bar{a}\bar{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1			
1	1			

Représentation de $\bar{b}\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1				

Représentation de $\bar{a}c$

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1				

Représentation de $\bar{a}\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1			1

Représentation de $a\bar{c}$

- **Représentation des mintermes**

a \ bc	00	01	11	10
0	1			
1				

Représentation du minterme $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1				

Représentation du minterme $\bar{a}\bar{b}c$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1				

Représentation du minterme $\bar{a}bc$

a \ bc	00	01	11	10
0				1
1				

Représentation du minterme $\bar{a}b\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1			

Représentation du minterme $a\bar{b}\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		1		

Représentation du minterme $a\bar{b}c$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	

Représentation du minterme abc

a \ bc	00	01	11	10
0				
1				1

Représentation du minterme $ab\bar{c}$

- **Représentation d'une fonction booléenne quelconque de 3 variables**

La représentation à l'aide d'un tableau de Karnaugh d'une fonction booléenne quelconque s'effectue en combinant les différentes représentations ci-dessus.

Exemples

1. Pour $f(a\,;b\,;c) = abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c}$ on a :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0			1	1
1			1	

2. Pour $f(a\,;b\,;c) = ab + \bar{a}\,\bar{c} + abc$ on a :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1			1
1			1	1

3. Pour $f(a\,;b\,;c) = abc + \bar{c} + ab$ on a :

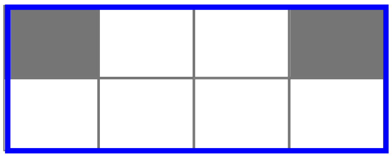
$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

Exercice 5

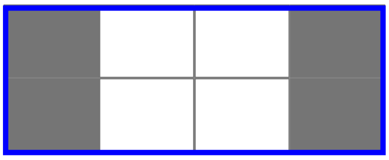
Remarque

Pour 3 variables booléennes : 4 cases du tableau de Karnaugh sont dites adjacentes si elles peuvent s'écrire à l'aide d'une seule variable et 2 cases sont dites adjacentes si elles peuvent s'écrire à l'aide d'un produit de 2 variables.

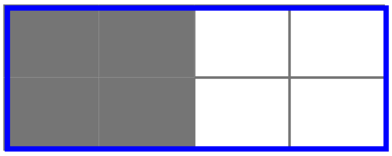
1. Exemple de cases adjacentes :



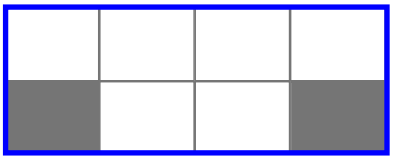
$\bar{a}\,\bar{c}$



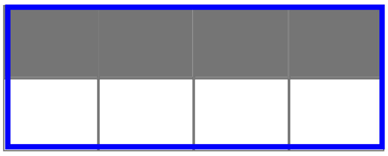
$\bar{c}$



$\bar{b}$

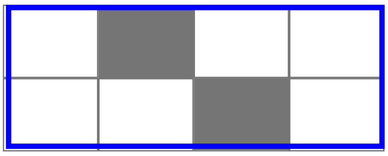


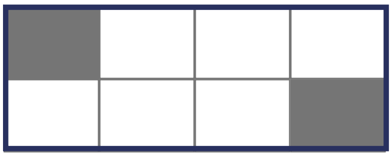
$a\bar{c}$



$\bar{a}$

2. Exemple de cases **non** adjacentes :





Elles ne peuvent pas s'écrire à l'aide d'un produit de 2 variables ou avec 1 variable.

3. Simplification des expressions booléennes

A. Méthode algébrique

Les calculs s'effectuent en utilisant les règles de calcul (associativité, commutativité, absorption, idempotence, distributivité par rapport à chaque loi, etc.) vues précédemment.

Exemple

Soit (B, +, .) un triplet muni d'une structure d'algèbre de Boole.

Soit $f : B^3 \rightarrow B$ la fonction de trois variables booléennes a, b, c définie par :

$$f(a, b, c) = a\bar{b}c + ac + ab\bar{c} + \bar{a}bc$$

On peut, par exemple, écrire : $f(a, b, c) = a.(\bar{b}c + c + b\bar{c}) + \bar{a}bc$

d'où : $f(a, b, c) = a.[c.(\bar{b}+1) + b\bar{c}] + \bar{a}bc$

$= a.[c + b\bar{c}] + \bar{a}bc$ (car $\bar{b} + 1 = 1$)

$= a.(c + b) + \bar{a}bc$ (car $c + b\bar{c} = c + b$)

$= ac + ab + \bar{a}bc$

$= ac + b(a + \bar{a}c)$

$= a.c + b.(a + c)$ (car $a + \bar{a}c = a + c$).

Et finalement : $f(a, b, c) = a.c + a.b + b.c.$

Exercice 6

B. Méthode graphique pour les fonctionsbooléennes à 2 variables

Pour simplifier une expression booléenne, on remplace deux cases adjacentes par une seule variable.

Exemple

Pour g définie par $g(a\,;\,b) = a + \bar{a}b$, on a :

$a \backslash b$	0	1
0		1(1)
1	1(2)	1(3)

On remplace (2) et (3) par a et (1) et (3) par b

D'où $g(a\,;\,b) = a + \bar{a}b = a + b$

3C. Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 3 variables

Pour simplifier l'écriture d'une fonction à l'aide d'un tableau de Karnaugh, on regroupe les cases adjacentes par quatre (si cela est possible) ou par deux que l'on remplace à l'aide de 1 (l'unique variable qui ne change pas d'état dans les 4 cases) ou 2 variables (les deux variables qui ne changent pas d'état dans les deux cases) respectivement.

Chaque case doit être prise dans au moins un regroupement du tableau contenant un «1».

Exemples

1. Pour $f(a\,;\,b\,;\,c) = abc + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc$ *on a :*

a \ bc	00	01	11	10
0			1 (1)	1 (2)
1			1 (3)	

Le regroupement des cases notées (1) et (2) peut être remplacé par le produit $\bar{a}b$ *(ici* $\bar{a}$ *et* b *ne changent pas d'état)* ; celui de (1) et (3) par le produit bc *(ici* b *et* c *ne changent pas d'état)*. Sous forme simplifiée on aura donc : $f(a\,;b\,;c) = \bar{a}b + bc$.

2. Pour $f(a, b, c) = abc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + \bar{a}\,bc$, on a :

a \ bc	00	01	11	10
0			1 (1)	
1		1 (2)	1 (3)	1 (4)

On peut effectuer trois regroupements de 2 cases adjacentes ; ainsi le produit $a.c$ remplace le regroupement des cases (2) et (3) ; le produit $b.c$ remplace celui des cases (1)et (3) et le produit $a.b$ remplace celui des cases (3) et (4), d'où l'expression de f, somme de ces trois produits booléens :

$$f(a, b, c) = a.b + a.c + b.c.$$

3. Pour $f(a\,;b\,;c) = \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + abc + \bar{a}\bar{b}c$, on a :

a \ bc	00	01	11	10
0	1 (1)	1 (2)	1 (3)	1 (4)
1			1 (5)	

Le regroupement des cases notées (1), (2), (3), et (4) peut être remplacé par la variable $\bar{a}$ et celui des cases notées (3) et (5) peut être remplacé par le produit bc. Sous forme simplifiée on aura donc : $f(a\,;b\,;c) = \bar{a} + bc$.

4. Pour $f(a\,;b\,;c) = ab + bc + \overline{a}\,\overline{c}$, on voit de même que $f(a\,;b\,;c) = b + \overline{a}\,\overline{c}$.

a \ bc	00	01	11	10
0	1		1	1
1			1	1

Exercices 7, 8

Remarques

a) La complémentaire $\overline{f}$ d'une fonction booléenne f est représentée par un tableau de Karnaugh comportant des « 1 » dans les cases vides du tableau représentatif et rien dans celles où des « 1 » sont présents .

Ainsi si on reprend la fonction $f(a, b, c) = abc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc$, de l'exemple 1, $\overline{f}$ sera représentée par le tableau suivant :

a \ bc	00	01	11	10
0	1 (1)	1 (2)		
1	1 (3)	1 (4)		1 (5)

Pour simplifier $\overline{f}$ on fait dans cet exemple deux regroupements, un de 4 cases adjacentes et l'autre de 2 cases adjacentes (vous remarquerez que la case notée (5) à l'extrémité droite du tableau, constitue un groupement avec la case sur la même ligne notée (3) à l'extrémité gauche du tableau).

Les cases adjacentes (1), (2), (3) et (4) peuvent être remplacées par $\overline{b}$ (ici $\overline{b}$ est la seule variable qui ne change pas d'état dans les 4 cases).

Les cases adjacentes (3) et (5) peuvent être remplacées par $a\overline{c}$. (ici a et $\overline{c}$ ne changent pas d'état).

D'où l'expression simplifiée de $\overline{f}$:

$$\overline{f}\,(a, b, c) = \overline{b} + a\overline{c}$$

b) L'écriture de la forme simplifiée d'une fonction booléenne obtenue à l'aide d'un tableau de Karnaugh **n'est pas unique.**

Ainsi pour la fonction f définie par le tableau de Karnaugh suivant :

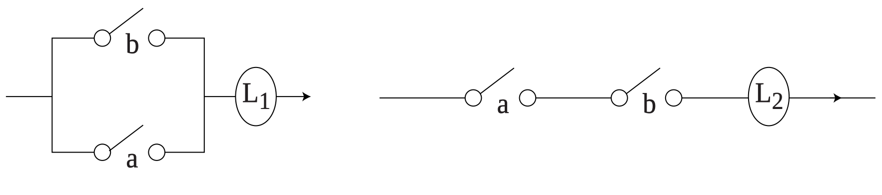
a \ bc	00	01	11	10
0	1 *(1)*	1 *(2)*		1 *(3)*
1		1 *(4)*	1 *(5)*	

$f(a, b, c) = \overline{a}\,\overline{b} + ac + \overline{a}.\overline{c}$ si l'on regroupe les cases (1) et (2) ; (4) et (5) ; (3) et (1)

$f(a, b, c) = \overline{b}\,c + ac + \overline{a}.\overline{c}$ si l'on regroupe les cases (2) et (4) ; (4) et (5) ; (3) et (1)

4. Exemple d'applications

Entre autres applications, l'algèbre de Boole est utilisée en automatisme, électricité, électronique, ... Elle permet de simplifier la réalisation de circuits électriques ; et ces derniers permettent de visualiser les opérations booléennes. Par exemple dans les montages suivants :



Notons $a = 1$ l'état où l'interrupteur a est fermé (et le courant circule) et $a = 0$ l'état contraire. Même chose pour b.

Notons $f(a,b)$ l'état où se trouve la lampe L_1 en fonction de l'état des interrupteurs a et b.

Notons $g(a,b)$ l'état où se trouve la lampe L_2 en fonction de l'état des interrupteurs a et b.

Si $f(a, b) = 1$ et $g(a, b) = 1$ signifient que les lampes L_1 et L_2 sont allumées, alors nous aurons la table de vérité suivante des différents états :

a	b	Lampe L_1 $f(a,b)$	Lampe L_2 $g(a,b)$	$a+b$	ab
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

On en déduit que : $f(a, b) = a+b$ et $g(a, b) = ab$.

Un produit booléen sera donc associé à un montage en série, une somme booléenne à un montage en parallèle.

Les calculs booléens permettent ainsi de modéliser et de simplifier des circuits plus complexes comportant des montages en série, en parallèle, boutons poussoirs, va et vient, etc.

Exercice 1 Simplifier l'écriture des expressions $A = (a+b).\bar{a}$ et $B = (b+\bar{b})\bar{a} + c(a+\bar{a})$.

Exercice 2 Développer et simplifier les expressions :

$$A = a.(a+b),\ B = (a+b)(a+c) \text{ et } C = (a+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b}).$$

Exercice 3 Déterminer le complémentaire des expressions :

$$A = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}\ ;\ B = \bar{a}.\bar{c} + bc + \bar{b}\ ;\ C = ab + \bar{a}.\bar{b}.$$

Exercice 4 Simplifier l'écriture des expressions : $A = \bar{a} + ab$, $B = a + \bar{a}.\bar{b}$ et $C = \bar{c} + \bar{b}.c$.

Exercice 5 *Tableaux de Karnaugh*

Représenter les tableaux de Karnaugh des fonctions définies par :

$$f(a,b) = ab + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} \text{ et } g(a,b,c) = ac + \bar{a}bc + \bar{a}\,\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c.$$

Simplifications

Exercice 6

Simplifier les expressions $A = \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + a\bar{b}$, et $B = a + \bar{a}bc + \bar{a}\,\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$

à l'aide des règles usuelles du calcul booléen.

Exercice 7

Les fonctions f et g sont représentées par les tableaux de Karnaugh ci dessous :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1			1
1		1	1	

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1	1		
1	1			1

Donner une expression simplifiée de $f(a,b,c)$ et de $g(a,b,c)$.

Exercice 8

Simplifier les expressions de l'exercice 6 à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

Exercice 9 Développer et simplifier les expressions :

$$A = (a + bc)(a + \bar{b}),\ B = (\bar{a} + bc).(abc + \bar{b}) \text{ et } C = \bar{a}.\bar{b}\,(ab + bc + ca).$$

Exercice 10 Simplifier les expressions booléennes :

$$A = bc + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\ ;\ B = abc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{c} + ab\bar{c}\ ;$$

$$C = ab + bc + ca + \bar{a}b\bar{c}\ ;\ D = abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c.$$

1. À l'aide d'un tableau de Karnaugh.

2. À l'aide des règles usuelles du calcul booléen.

Exercice 11

On définit les opérateurs T et ⊕ respectivement par :

$$a \mathrm{T} b = ab + \bar{a}.\bar{b}\ ;\ a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}.b.$$

1. Calculer : $\bar{a} \mathrm{T} \bar{b}$, $\bar{a} \oplus \bar{b}$.

2. Vérifier que : $a \oplus b = \bar{a} \mathrm{T} b = a \mathrm{T} \bar{b} = \bar{a} \oplus \bar{b}$.

Exercice 12

Soit f la fonction de quatre variables booléennes a, b, c, d définie par :

$$f(a, b, c, d) = a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{c}.d + a.b.\bar{c}.d + b.\bar{c} + \bar{a}.b.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{d} + \bar{a}.b.\bar{c}.$$

1. On suppose que la variable d prend la valeur 1.
Écrire f comme somme de trois variables booléennes : $g(a, b, c)$.

2. Simplifier la fonction g.

a) Par la méthode algébrique.

b) À l'aide d'un tableau de Karnaugh

Exercice 13 *L'opérateur « nand »*

L'opérateur « nand » est défini par nand $(a,\ b)\ =\ a\ |\ b\ =\ \overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$.

a) Calculer $(a\,|\,a)$ et $(a\,|\,a)\,|\,a$.

b) Est-ce que l'opérateur est commutatif ?

c) Exprimer $\overline{a}$, $a+b$ et ab uniquement à l'aide de l'opérateur nand.

d) Si $c = 0$, exprimer $g(a, b, c)$ *(g définie dans l'exercice 12)* uniquement à l'aide de l'opérateur nand.

Exercice 14 *L'opérateur « nor »*

L'opérateur « nor » est défini par nor $(a,\ b)\ =\ a \downarrow b = \overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}.$

a) Calculer $(a \downarrow a)$ et $(a \downarrow a) \downarrow a$.

b) Est-ce que l'opérateur est commutatif ?

c) Exprimer $\overline{a}$, $a+b$ et ab uniquement à l'aide de l'opérateur nor.

Exercice 15 *(BTS IG juin 1998)*

1. On considère un ensemble E muni d'une structure d'algèbre de Boole.

a) Soit l'expression $A = abc + a\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c$

où a, b et c désignent trois éléments de E. Simplifier A à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

b) Montrer, par un calcul direct, que : $A = \mathrm{ac} + \bar{a}bc$ ou encore : $A = ac + bc$.

2. Un immeuble comprend six logements dont les surfaces figurent dans le tableau ci-dessous :

Numéro du logement	1	2	3	4	5	6
Superficie en m^2	55	105	112	228	247	253

Les logements 1 et 3 appartiennent à Monsieur A, les logements 2 et 4 appartiennent à Madame B, les 5 et 6 appartiennent à Monsieur C. Chacun détient à l'assemblée des copropriétaires un nombre de voix égal à la superficie totale de ses logements, exprimée en m^2. Ainsi, Monsieur A dispose de : $55 + 112 = 167$ voix.

Une proposition concernant le remplacement de la chaudière est mise au vote à l'assemblée. Pour être adoptée, elle doit recueillir la majorité des voix, soit 501 voix.

Si A vote « pour », son vote favorable est désigné par a. S'il vote « contre », ou s'il s'abstient, son vote est désigné par : $\overline{a}$. De même pour B et C.

a) Quelle situation de vote traduit le produit booléen : $\overline{a}\,\overline{b}\,c$?

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous pour les 8 situations de votes possibles.

Situations possibles	Nombre de voix	Proposition votée (noter oui ou non)
$a\,b\,c$	1 000	oui
$\overline{a}\,b\,c$		
$a\,\overline{b}\,c$		
$a\,b\,\overline{c}$		
$\overline{a}\,\overline{b}\,c$		
$\overline{a}\,b\,\overline{c}$		
$a\,\overline{b}\,\overline{c}$		
$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$		

c) Ecrire l'expression booléenne qui exprime la condition pour que la proposition soit adoptée.

d) En utilisant les résultats de la question 1. , écrire cette condition sous forme simplifiée, puis la traduire par une phrase explicative.

Exercice 16 *(BTS IG juin 2001)*

Un règlement administratif concerne les trois catégories d'individus suivantes :

- les hommes de moins de 50 ans ;
- les non-salariés ayant 50 ou plus de 50 ans ;
- les femmes qui sont soit salariées, soit non salariées et qui ont moins de 50 ans.

On définit quatre variables booléennes h, a, s, r ainsi :

x désignant un individu quelconque,

$h = 1$ si x est un homme ($h = 0$ sinon)

$a = 1$ si x est âgé(e) de 50 ou plus de 50 ans ($a = 0$ sinon)

$s = 1$ si x est salarié(e) ($s = 0$ sinon)

$r = 1$ si x est concerné(e) par le règlement ($r = 0$ sinon)

1. Quels sont les individus x pour lesquels on a $h\,\overline{a} = 1$?

2. On admet que $r = h.\,\overline{a} + \overline{s}.\,a + \overline{h}.\,(s + \overline{s}.\,\overline{a})$.

a) Représenter r par une table de Karnaugh (ou une table de vérité).

b) En déduire une expression simplifiée de r.

c) Quelle est la catégorie d'individus non concernés par le règlement ?

3. En utilisant uniquement le calcul booléen, montrer que :

$$h.\overline{a} + \overline{s}.a + \overline{h}.(s + \overline{s}.\overline{a}) \;=\; \overline{a} + \overline{s} + \overline{h}.$$

(On pourra utiliser les propriétés suivantes, vérifiées par deux variables booléennes y et z : $y + yz = y$ *et* $y + \overline{y}.z = y + z$).

TP1

A. Soit f **la fonction booléenne** de quatre **variables booléennes** a, b, c, d définie par :

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \;=\; ab + bcd + \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,c\,\overline{d}$$

Si d prend la valeur 1, on note g la fonction de trois variables définie par :

$$g(a, b, c) = f(a, b, c, 1).$$

1. Expliciter $g(a, b, c)$.

2. Simplifier la fonction g en prenant la méthode de votre choix : méthode algébrique ou tableau de Karnaugh.

3. Déterminer la fonction $\overline{g}$, complémentaire de la fonction g.

B. Dans une entreprise, les personnes pouvant bénéficier de l'attribution d'une prime sont les suivantes :

- Toute personne de plus de 40 ans, ayant plus de 10 ans d'ancienneté.
- Toute personne de plus de 10 ans d'ancienneté ayant suivi un stage de formation dans les cinq dernières années, et gagnant moins de 1500 € par mois.
- Toute personne de moins de 40 ans, qui n'a pas suivi de stage de formation dans les cinq dernières années, mais ayant plus de 10 ans d'ancienneté et gagnant moins de 1500 € par mois.
- Toute personne de moins de 40 ans, ayant moins de 10 ans d'ancienneté mais qui a suivi un stage de formation dans les cinq dernières années.
- Toute personne de plus de 40 ans, de moins de 10 ans d'ancienneté qui a suivi un stage de formation dans les cinq dernières années bien qu'elle gagne plus de 1500 € par mois.

On note a, b, c et d les quatre variables booléennes caractérisant respectivement les propriétés « être une personne de plus de 40 ans », « avoir plus de 10 ans d'ancienneté », « avoir suivi un stage de formation dans les cinq dernières années » et « gagner moins de 1500 € par mois ».

1. a) Quelle situation traduit le produit booléen : $a\,\overline{b}\,c\,\overline{d}$?

b) Exprimer à l'aide d'une fonction booléenne les conditions caractérisant l'attribution de la prime.

2. Parmi les personnes gagnant moins de 1500 € par mois :

a) Monsieur Martin a plus de 10 ans d'ancienneté. Peut-il obtenir la prime ?

b) Même question pour Monsieur Durand qui a plus de 40 ans et moins de 10 ans d'ancienneté.

c) Quelles sont les catégories d'employés qui auront la prime ?

d) Quelles sont les catégories qui ne remplissent aucune des conditions de son obtention ?