Langage logique – Langage ensembliste-Algèbre de Boole –Graphes

BTS SIO2 Septembre 2013

Plan du cours :

Partie I : Langage logique

1) – QCM DE LOGIQUE

2)-A- Enoncé, proposition et valeur de vérité

A-1 : Enoncé :

A-2 Proposition et valeur de vérité

B- Un prédicat

C- Connecteurs logiques :

C-1 : Valeur de vérité.

C-2 : Négation :

C-3 : Conjonction

C-4 : Disjonction :

C-5 : Implication :

C6 : Equivalence :

D : Calcul des prédicats

D-1 : Prédicat :

D-2 : Quantificateur universel

D-3 : Quantificateur existentiel :

D-4 : Ordre des quantificateurs :

D-5 : Négation d'une proposition quantifiée :

E : Ensembles et logique

E-1 : Prédicats et parties d'un ensemble :

E-2 : Propositions et parties d'un ensemble

Partie II : Langage ensembliste

A- Cardinal d'un ensemble fini

B- Parties d'un ensemble

B1 : Ensemble des parties d'un ensemble :

B2 : Complémentaire d'une partie d'un ensemble :

B3 : Opérations sur les parties d'un ensemble :

C : Produit cartésien :

D : Application d'un ensemble dans un autre ensemble :

D1 : Définitions et notations :

D2 : Image d'une partie. Image réciproque :

D3 : Applications injectives, surjectives et bijectives :

D4 : Cardinalités d'une application :

D5 : Composition d'applications :

EXERCICES : Partie A

EXERCICES DE LOGIQUES Parie B

Partie I : Langage logique

1) – QCM DE LOGIQUE correction

Q1) Traduire à l'aide d'un connecteur : (x, y) distinct de (0, 0)

1) x différent de 0 et y différent de 0

2) x et y sont deux réels non nuls.

3) x différent de 0 ou y distinct de 0

Q2) Traduire l'affirmation: a et b ont la même valeur absolue

1) $a = b$

2) $a = - b$

3) $a = b$ ou $a = - b$

Q3) Traduire la négation de : $x < 2$ et $x > - 1$

1) $x > 2$ et $x < - 1$

2) $x >2$ ou $x < - 1$

3) $x \geq 2$ ou $x \leq - 1$

Q4) Donner la négation de x >= 5

1) $x < - 5$

2) $x > 5$

3) $x < 5$

Q5) Donner la négation de : $x \leq 3$ ou $x > 1$

1) $x \geq 3$ ou $x < 1$

2) $x >3$ et $x \leq 1$

3) $x \geq 3$ ou $x \leq 1$

Q6) Donner la contraposée de : p implique q , p et q étant deux propositions.

1) (Non p) ou q

2) (Non q) implique (Non p)

3) q implique p

Q1)	x différent de 0 ou y distinct de 0
Q2)	a = b ou a = - b
Q3)	$x \geq 2$ ou $x \leq -1$
Q4)	x < 5
Q5)	$x > 3$ et $x \leq 1$
Q6)	(Non q) implique (Non p)

2)-A- Enoncé, proposition et valeur de vérité

A-1 : Enoncé :

On appelle « énoncé » une phrase mathématique qui :
(a) Respecte les règles de la syntaxe mathématique ;
(b) Respecte, lorsqu'elle est lue, les règles de la grammaire française ;
(c) A un sens ;

Exemples : « $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ » ou « $5x^2 - 4\sqrt{x} < \pi$ »

A-2 Proposition et valeur de vérité

Si l'on peut dire d'un énoncé qu'il est « vrai » ou « faux », on l'appelle « proposition ». Les termes « vrai » et « faux » sont appelés « valeurs de vérité » et permettent d'élaborer la logique dite « logique binaire ».
Le mathématicien Georges BOOLE a noté 1 la valeur « vrai » et 0 la valeur « faux ».
On peut ainsi effectuer des calculs sur les valeurs de vérité des proposition : c'est ce que l'on appelle « l'algèbre de BOOLE ».

Par exemple :
(a) « $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ » est un énoncé vrai. On dira que c'est une proposition vraie.
(b) « $\sqrt{2} = 1,414$ » est un énoncé faux. On dira que c'est une proposition fausse.
(c) « $x^2 + 2x - 3 = 0$ » est un énoncé mais ne connaissant pas la valeur de x, on ne peut rien dire sur sa valeur de vérité : il ne s'agit donc pas d'une proposition.

(d) $7 > 0$ est une proposition. Elle est vraie.

(e) $11 < 0$ est une proposition. Elle est fausse.

Contre-exemple " Les entiers pairs sont plus utiles que les entiers impairs ".

Ce n'est pas une proposition car on ne sait pas si c'est vrai ou faux.

Conclusion :

Une proposition mathématique est une : Affirmation mathématique dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse."

B- Un prédicat (ou propriété) est défini (e) sur un ensemble appelé référentiel.

"Affirmation faisant intervenir une variable x décrivant un ensemble qui, dès que l'on fixe la variable x, devient une proposition."

Exemple : $5x - 3 < 0$ où x décrit l'ensemble des réels.

C'est un prédicat que l'on peut noter p(x) avec x dans IR .

Dès que x est connu, on peut dire si l'inégalité est vraie ou si elle est fausse.

C- Connecteurs logiques :

C-1 : Valeur de vérité. 1 est attribuée à une proposition vraie.

0 est attribuée à une proposition fausse.

Exemple : Elles sont utilisées à l'occasion d'un tableau de vérité. La proposition $7 < -1$ est fausse. Sa valeur de vérité est 0.

$7 < -1$
0

C-2 : Négation :

La notion de négation en logique binaire correspond à celle de contraire du langage courant.
Par exemple la proposition « un vélo a quatre roues » admet comme négation la proposition suivante : « un vélo n'a pas quatre roues ».
Le « connecteur logique négation », qui se note « NON », « NOT », $\neg$ ou par surlignage (on peut donc écrire « NON P », « NOT P », « $\neg$ P » ou « $\overline{P}$ ») change la valeur de vérité d'une proposition suivant la table de BOOLE ci-dessous :

P	NON P
0	1
1	0

Remarque : dans une table de BOOLE, on fait conventionnellement apparaître dans la (les) première(s) ligne(s) la valeur de vérité nulle.

Conclusion : le NON. Noté $\neg P$ est un connecteur mis devant une proposition p.

NON p est une proposition qui est : vraie si p est fausse, fausse si p est vraie

P	$\neg P$
0	1
1	0

Exemple: La négation de " 4 < 5 " est "4 ≥ 5 "Le tableau suivant traduit la situation.

4 < 5	4 ≥ 5
1	0

C-3 : Conjonction :

Faire agir le connecteur conjonction sur les deux proposition P et Q consiste à élaborer la nouvelle proposition « P ET Q » appelée « conjonction de P et Q ».
On peut la noter : « P ET Q », « P AND Q » ou « P^Q ».
La table de Boole de ce connecteur est fournie ci-dessous.

Conclusion : Le ET est un connecteur mis entre deux propositions p, q.

Remarque : il est indispensable de retenir que la conjonction de deux propositions ne peut être vraie que si les deux propositions le sont.

p ET q est une proposition qui n'est vraie que si p est vraie et q est vraie, en même temps. Le tableau traduit ce fait.

P	q	P et q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple : On considère les propositions: " 6 est pair " , " - 5 < - 3 "

Le tableau ci dessous donne la valeur de vérité de la proposition:

(6 est pair) ET (- 5 < - 3)

6 est pair	-5 <-3	(6 est pair) et (-5 <-3)
1	1	1

C-4 : Disjonction :

Faire agir le connecteur disjonction sur les deux propositions P et Q consiste à élaborer la nouvelle proposition « P OU Q » appelée « disjonction de P et Q ».
On peut la noter « P OU Q », « P OR Q » ou « $P \vee Q$ ».

Conclusion : Le OU est un connecteur mis entre deux propositions p, q. p OU q est une proposition qui n'est fausse que si p et q sont fausses, en même temps. Le tableau traduit ce fait.

P	q	P ou q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemple : « 6 est impair » , « - 5 < - 3 » Le tableau donne la valeur de vérité de la proposition: (6 est impair) OU (- 5 < - 3)

6 est impair	-5 < -3	(6 est impair) OU (- 5 < -3)
0	1	1

Remarque :

1. Il suffit qu'au moins l'une des deux propositions soit vraie pour que $P \vee Q$ le soit ;
2. Ce connecteur de disjonction est encore appelé « connecteur de disjonction inclusive » car $P \vee Q$ est vraie lorsque P et Q le sont toutes les deux.
   Il existe cependant un connecteur de « disjonction exclusive » tel que $P \vee Q$ n'est vraie que si une seule des deux propositions l'est.
3. W (ou exclusif). C'est un connecteur mis entre deux propositions p, q.

p W q est une proposition qui n'est vraie que quand soit p est vraie et q fausse,

soit p fausse et q vraie. Le tableau traduit ce fait.

P	q	P W q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exemple: On considère les propositions: 6 est pair " , " - 5 < - 3 "

Le tableau donne la valeur de vérité de la proposition: (6 est pair) W (- 5 < - 3)

6 est impair	-5 < -3	(6 est impair) W (- 5 < -3)
1	1	0

C-5 : Implication :

Il correspond à la structure de raisonnement « Si P alors Q » : on écrira « $P \Rightarrow Q$ » que l'on prononce « « Si P alors Q », « P entraîne Q » ou « P implique Q ».

Conclusion : Le => (Implique) est un connecteur mis entre deux propositions p, q. p implique q est une proposition qui n'est fausse que quand p est vraie et fausse. Le tableau traduit ce fait.

P	q	$P \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Retenir que « le vrai ne peut entraîner le faux » (3ème ligne) !

Exemple 1: On considère les propositions: 6 est impair " , " - 5 < - 3 " Le tableau donne la valeur de vérité de la proposition: (6 est impair) => (- 5 < - 3)

6 est impair	-5 < -3	(6 est impair) ⇒(- 5 < -3)
0	1	1

ATTENTION:

TOUTE PROPOSITION FAUSSE IMPLIQUE N'IMPORTE QUELLE PROPOSITION VRAIE OU FAUSSE

Exemple 2 : On considère les propositions: « 6 est impair » , « - 5 > - 3 »

Le tableau donne la valeur de vérité de la proposition:(6 est impair) => (- 5> - 3)

6 est impair	-5 > -3	(6 est impair) ⇒(- 5 > -3)
0	0	1

C6 : Equivalence :

Il est noté « $\Leftrightarrow$ » et se prononce « P est équivalent à Q », « P si, et seulement si, Q » ou « Pour avoir P il faut et il suffit que l'on ait Q ».

Conclusion : Le <=> (Equivalent à) est un connecteur mis entre deux propositions p, q. p <=> q est une proposition qui n'est vraie que si soit p et q sont toutes les deux vraies soit p et q sont toutes les deux fausses. Le tableau traduit ce fait.

P	q	$P \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On peut aisément vérifier (le faire à titre d'exercice) que l'on a $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ (commutativité du connecteur ET), $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ (commutativité du connecteur OU), $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ et $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$;

Exemple: On considère les propositions:" 6 est impair " , " - 5> - 3 " Le tableau donne la valeur de vérité de la proposition: (6 est impair) <=> (- 5 > - 3)

6 est impair	-5 > -3	(6 est impair) $\Leftrightarrow$ (- 5 > -3)
0	0	1

D : Calcul des prédicats

D-1 : Prédicat :

On appelle « prédicat à une variable » un énoncé $\mathrm{P}(x)$ qui se transforme en proposition lorsqu'on lui ajoute une information sur la variable.

Nous avions considéré l'énoncé « $x^2+2x-3=0$ ».
Cet énoncé est un prédicat à une variable puisque dès lors que l'on donne une valeur à la variable x, on est capable de dire si l'égalité $x^2+2x-3=0$ est, ou non, vérifiée.
Pour $x=-3$, on obtient une proposition vraie. On dit que -3 est un exemple.
Pour $x=2$, on obtient une proposition fausse. On dit que 2 est un contre-exemple.

On définirait de façon analogue les prédicat à *n* variables.

D-2 : Quantificateur universel

Soit le prédicat à une variable $\mathrm{P}(x)$. Supposons que la variable *x* soit un élément de l'ensemble E.
La proposition « Quel que soit *x* élément de E, $\mathrm{P}(x)$ » (que l'on aurait également pu écrire « Pour tout *x* dans E, $\mathrm{P}(x)$ ») peut être écrite de façon abrégée comme suit :

$$\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$$

« $\forall$ » se lit onc « pour tout » ou « quel que soit ».
Ce symbole est appelé « quantificateur universel ».
La virgule se lit « on a ».

Exemples :

« $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)>0$ » est un prédicat vrai MAIS : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)=1$ » est un prédicat faux puisque la proposition obtenue pour $x=2$ est fausse.

Pour prouver qu'une proposition quantifiée par « $\forall$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

D-3 : Quantificateur existentiel :

Soit le prédicat à une variable $\mathrm{P}(x)$. Supposons que la variable x soit un élément de l'ensemble E.

La proposition « Il existe au moins un élément x de E tel que $\mathrm{P}(x)$ » peut être écrite de façon abrégée comme suit :

$$\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$$

« $\exists$ » se lit onc « il existe ».
Ce symbole est appelé « quantificateur existentiel ».
La virgule se lit « tel que ».

Exemples : « $\exists x \in \mathbb{R}, \ln x = -67$ » est une proposition vraie. « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ » est également une proposition vraie.
En revanche : « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ » est une proposition fausse.

Pour prouver qu'une proposition quantifiée par « $\exists$ » est vraie, il suffit de trouver un exemple convenant.

D-4 : Ordre des quantificateurs :

Considérons les deux prédicats suivants :
« $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ » et « $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ ».

Le premier signifie que tout réel non nul admet un inverse dans $\mathbb{R}$. Le second signifie que tous les réels non nuls admettent le même inverse !

D-5 : Négation d'une proposition quantifiée :

On admettra le théorème suivant :

- La négation de la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est la proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$ » ;
- La négation de la proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$ »

On peut donc dresser le tableau suivant :

P	NON P
$\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$	$\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$
$\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$	$\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$

Exemple :

La négation de la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ » est la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ ». La première est fausse puisque $x = 0$ est un contre-exemple. La seconde est bien vraie puisque pour $x = 0$ on a bien $x^2 \leq 0$.

Conclusion :

- QUANTIFICATEUR; « QUELQUE SOIT » noté ∀ ∀ signifie « Pour tout .. »

- QUANTIFICATEUR" Il EXISTE AU MOINS UN ..." noté ∃ ∃ signifie "Il existe au moins un .... "

Exemple : ∀ x dans IR , $x^2 + 1 > 0$ .Signifie : Pour tout réel x on a $x^2 + 1 > 0$.

Exemple : ∃x dans IR , x + 1 > 0.Signifie : Il existe au moins un réel x tel que x+1 > 0.

Exemple: ∀y dans IR ∃x dans IR, y = 2 x + 1 signifie: Pour tout réel y il existe au moins un réel x tel que y = 2 x + 1

- ATTENTION : On ne peut pas permuter LES QUANTIFICATEURS;

  ∃ y dans IR, ∀ x dans IR y = 2 x + 1 n'a pas la même signification.

- NEGATION d'une affirmation avec des quantificateurs. ∀ devient ∃ ∃ devient ∀

- LOIS DE MORGAN Soit p, q deux propositions.

NON (p ET q) équivaut à (NON p) OU (NON q)

NON (p OU q) équivaut à (NON p) ET (NON q)

Tableaux de vérité

P	q	$\neg p$	$\neg q$	(p et q)	$\neg$(p et q)
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0

P	q	$\neg p$	$\neg q$	(p ou q)	$\neg$(p ou q)
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0

PROPRIETE. Soit p, q, r des propositions.

p ET (q OU r) équivaut à (p ET q) OU (p ET r)

p OU (q ET r) équivaut à (p OU q) ET (p OU r)

Tableaux de vérité

P	q	r	q et r	p ou (q et r)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

p	q	r	P ou q	P ou r	(p ou q) et (P ou r)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

E : Ensembles et logique

E-1 : Prédicats et parties d'un ensemble :

Soit, par exemple, à résoudre l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Elle admet comme solution la paire $\{2;3\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

On peut considérer cette équation comme un prédicat : « $x^2 - 5x + 6 = 0$ ».
En résolvant l'équation, on peut affirmer que la proposition « $\forall x \in \{2;3\}, x^2 - 5x + 6 = 0$ » est vraie : on peut alors dire que l'on a « résolu le prédicat » et que son « ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $\{2;3\}$ ».

On écrira finalement : $\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2;3\}$

Soit l'autre exemple : $2x + 3 < 0$.

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$.

Si, cette fois, on considère le prédicat « $2x + 3 < 0$ », on peut écrire :

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[, 2x + 3 < 0$. Ici encore, on dira que l'on a résolu le prédicat et que son ensemble des solutions est $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$.

On écrira finalement : $\{x \in \mathbb{R}, 2x + 3 < 0\} = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$

E-2 : Propositions et parties d'un ensemble

Nous admettrons qu'il est possible d'interpréter le langage des propositions en langage ensembliste.
Pour cela, on s'appuiera sur le tableau de correspondance suivant :

NON	ET	OU	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\complement_E$	$\cap$	$\cup$	$\subset$	$=$

A titre d'exemple considérons les prédicats :
« $2x+3>0$ » et « $3x-7<0$ ».

En les résolvant, on obtient les ensembles de solutions : $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[$. Les propositions : « $\forall x\in\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[, 2x+3>0$ » et « $\forall x\in\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[, 3x-7<0$ » sont vraies.

Considérons désormais le prédicat : « $2x+3>0$ et $3x-7<0$ ».

Résoudre le système d'inéquations : $\begin{cases}2x+3>0\\3x-7<0\end{cases}$ conduit facilement à l'ensemble des solutions : $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\cap\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[=\left]-\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right[$.

Partie II : Langage ensembliste

C- Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini (c'est à dire comportant un nombre fini d'éléments).
On appelle « cardinal de E », noté **card E**, le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Par exemple, avec $\mathrm{E}=\{1;4;12;34\}$, on a $\mathrm{card\ E}=4$.

D- Parties d'un ensemble

B1 : Ensemble des parties d'un ensemble :

Soit E un ensemble.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties (encore appelées « sous-ensembles ») de E.

A titre d'exemple, considérons à nouveau l'ensemble $\mathrm{E}=\{1;4;12;34\}$.

Les parties de E sont : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{12\}$, $\{34\}$, $\{1;4\}$, $\{1;12\}$, $\{1;34\}$, $\{4;12\}$, $\{4;34\}$, $\{12;34\}$, $\{1;4;12\}$, $\{1;4;34\}$, $\{1;12;34\}$, $\{4;12;34\}$ et $\{1;4;12;34\}$.

On a donc ici :

$$\mathcal{P}(\mathrm{E})=\{\varnothing;\{1\};\{4\};\{12\};\{34\};\{1;4\};\{1;12\};\{1;34\};\{4;12\};\{4;34\};\{12;34\};\{1;4;12\};\{1;4;34\};\{1;12;34\};\{4;12;34\};\{1;4;12;34\}\}$$

Note (hors programme) : si E est un ensemble fini tel que $\mathrm{card\ E}=n$ alors : $\mathrm{card}\ \mathcal{P}(E)=2^n$
(on vérifiera, dans l'exemple fourni ci-dessus, que $\mathcal{P}(E)$ comporte bien $2^4=16$ éléments)

B2 : Complémentaire d'une partie d'un ensemble :

Soit E un ensemble et A une partie de E.
On appelle « complémentaire de A dans E », noté $\complement_E A$ ou $\overline{A}$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Considérons à nouveau l'ensemble $E=\{1;4;12;34\}$.

Soit $A=\{4;34\}$. On a alors : $\overline{A}=\{1;12\}$.

Soit $B=\{1;34\}$. On a alors : $\overline{B}=\{4;12\}$.

Citons les deux cas particuliers, valables quel que soit l'ensemble E : $\overline{\varnothing}=E$ et $\overline{E}=\varnothing$.

B3 : Opérations sur les parties d'un ensemble :

Dans ce qui suit , E est un ensemble et A et B sont deux parties de E

Intersection
On appelle « intersection de A et B », notée $A\cap B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B.

Avec les sous-ensembles A et B définis plus haut, on a : $A\cap B=\{34\}$

Réunion
On appelle « réunion de A et B », notée $A\cup B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B.

Avec les sous-ensembles A et B définis plus haut, on a : $A\cup B=\{1;4;34\}$

C : Produit cartésien :

Cas de deux ensembles

Soit E et F deux ensembles.

L'ensemble des couples $(x; y)$ où x appartient à E et y appartient à F est appelé « produit cartésien de E et F ». On le note $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ (que l'on peut lire « E croix F »).

A titre d'exemple considérons les ensembles : $\mathrm{E}=\{a;b;d\}$ et $\mathrm{F}=\{1;2\}$.

On a : $\mathrm{E}\times\mathrm{F}=\{(a;1);(a;2);(b;1);(b;2);(d;1);(d;2)\}$

Notes :

1. Si $\mathrm{F}=\mathrm{E}$ alors $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ peut être noté E^2 ;
2. Si $\mathrm{F}\neq\mathrm{E}$ alors $\mathrm{E}\times\mathrm{F}\neq\mathrm{F}\times\mathrm{E}$.

Cas de *n* ensembles

Soit E_1, E_2, …, E_n n ensembles.

L'ensemble des n-uplets $(x_1;x_2;x_3;...;x_n)$ où x_1 appartient à E_1, x_2 appartient à E_2, …, x_n appartient à E_n est appelé « produit cartésien de E_1, E_2, …, E_n ».

On le note : $\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\times\mathrm{E}_3\times...\times\mathrm{E}_n$ ou $\prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}_i$

Cardinal d'un produit cartésien

Soit E_1, E_2, …, E_n n ensembles finis tels que $\mathrm{card}\ \mathrm{E}_1=N_1$, $\mathrm{card}\ \mathrm{E}_2=N_2$, …, $\mathrm{card}\ \mathrm{E}_n=N_n$ alors :

$$\mathrm{card}\ \mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\times\mathrm{E}_3\times...\times\mathrm{E}_n=\mathrm{card}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}_i=\mathrm{card}\ \mathrm{E}_1\times\mathrm{card}\ \mathrm{E}_2\times...\times\mathrm{card}\ \mathrm{E}_n=N_1\times N_2\times...\times N_n=\prod_{i=1}^{n}N_i=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{card}\ \mathrm{E}_i$$

D : Application d'un ensemble dans un autre ensemble :

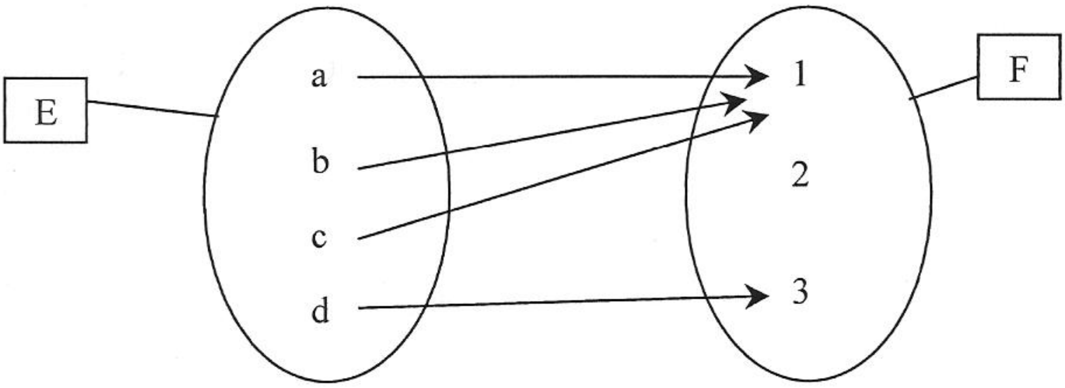
D1 : Définitions et notations :

Soit E et F deux ensembles.
On dit que « *h* est une application de E dans F » si elle associe à tout élément x de E un unique élément de F qui est appelé « image de x par l'application h » et que l'on notera $h(x)$.

L'application est notée : $h\begin{cases} E \to F \\ x \mapsto h(x) \end{cases}$

L'ensemble E est appelé « ensemble de départ », l'ensemble F « ensemble d'arrivée ».
L'ensemble des couples $(x;h(x))$ est un sous-ensemble de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ appelé « graphe de h ».

Exemple d'application (cf le diagramme sagittal ci-dessous) :



Dans cet exemple, h associe aux éléments a, b et c de E l'élément 1 de F.
On écrit : $h(a)=h(b)=h(c)=1$. On dit que les éléments a, b et c de E sont les « antécédents » de 1 par l'application h.
Remarquons que l'élément 2 de F n'admet pas d'antécédent par h.

D2 : Image d'une partie. Image réciproque :

Soit E et F deux ensembles et h une application de E dans F. Soit A une partie de E.
Le sous-ensemble de F constitué des images des éléments de A est appelé « image de A par h » et noté $h(\mathrm{A})$.

Reprenons l'exemple ci-dessus. Considérons $\mathrm{A}_1=\{a;b\}$, $\mathrm{A}_2=\{a;b;c\}$ et $\mathrm{A}_3=\{b;d\}$.

On a : $h(\mathrm{A}_1)=h(\{a;b\})=\{1\}$, $h(\mathrm{A}_2)=\{1\}$ et $h(\mathrm{A}_3)=\{1;3\}$.

Reprenons l'exemple ci-dessus. Considérons $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{1;2\}$ et $B_3 = \{3\}$.
On a : $h^{-1}(B_1) = h^{-1}(\{1\}) = \{a;b;c\}$, $h^{-1}(B_2) = \{a;b;c\}$ et $h^{-1}(B_3) = \{d\}$.

Soit B une partie de F. L'ensemble des antécédents par l'application h des éléments de B est appelé « image réciproque de B » et est noté $h^{-1}(B)$.

D3 : Applications injectives, surjectives et bijectives :

Soit E et F deux ensembles et h une application de E dans F.
On dit que :
→ « *h* est injective » ou que « *h* est une injection » si tout élément de F admet au plus un antécédent.
→ On dit que « *h* est surjective » ou que « *h* est une surjection » si tout élément de F admet au moins un antécédent.
→ On dit que « *h* est bijective » ou que « *h* est une bijection » si elle est à la fois injective et surjective.

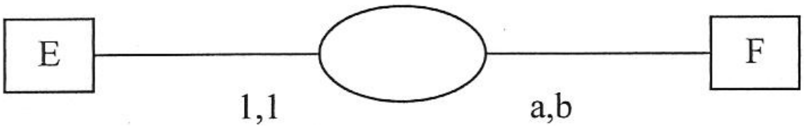
Note : une application peut n'être ni injective, ni surjective. L'application ci-dessus en est un exemple. En effet, puisque 2 n'admet pas d'antécédent, h n'est pas surjective. Par ailleurs, 1 admettant trois antécédents, h n'est pas injective.

Exemples

Application injective	Application surjective
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $x \mapsto x$	$i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^2$

D4 : Cardinalités d'une application :

En informatique, une application de l'ensemble E dans l'ensemble F sera représentée comme suit :



« 1,1 » (deux fois le chiffre 1) désigne les « <u>cardinalités de départ</u> » et signifie que tout élément de E admet au moins une image (premier 1) et admet au plus une image (deuxième 1). En d'autres termes, tout élément de E admet exactement une et une seule image (c'est la définition de l'application).
« *a*,*b* » désigne les « <u>cardinalités d'arrivée</u> » et signifie que tout élément de F admet au moins *a* antécédents et admet au plus *b* antécédents.

Pour une application injective, on a : $b = 1$ (« au plus un antécédent ») ;
Pour une application surjective, on a : $a = 1$ (« au moins un antécédent ») ;
Pour une application bijective, on a : $a = 1$ et $b = 1$.

D5 : <u>Composition d'applications</u> :

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F et g une application de l'ensemble F dans l'ensemble G.

Considérons l'application h de E dans G définie comme suit : $h\begin{cases} E \to G \\ x \mapsto g\left(f(x)\right) \end{cases}$

L'application h est notée « $g \circ f$ » (que l'on peut lire « g rond f ») et est appelée « <u>application composée de f et g</u> ».
En résumé : $\forall x \in E,\ h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$

Conclusion :

INJECTION (ou application injective) d'un ensemble E dans un ensemble F.

Soit E et F deux ensembles. Soit f une fonction de E dans F. f est une INJECTION DE E dans F quand:

- ∀ x dans E ∃! y dans F, f(x) = y.
- ∀x dans E ∀y dans F, f(x) = f(y) => x = y .

Ainsi une application de E dans F qui conserve" la distinction" est une injection de E dans F.

Exemple :

Soit la fonction f : x → 2 x + 1 est une injection de IR dans IR. En effet:

- ∀ x dans IR ∃! y dans IR, 2 x + 1 = y.
- ∀ x dans IR ∀ y dans IR, 2 x + 1 = 2 y + 1 => x = y

↳ SURJECTION D'UN ENSEMBLE E SUR UN ENSEMBLE F (Ou application surjective d'un ensemble E sur un ensemble F)

Soit E et F deux ensembles. Soit f une fonction de E dans F.

f est une SURJECTION DE E SUR F quand:

• ∀ x dans E ∃! y dans F, f(x) = y.

∀ y dans F ∃x dans E, y = f(x).(Existence d'au moins un antécédent pour chaque élément de F.)

Exemple :La fonction f de l'exemple précédent est une surjection de IR sur IR.

En effet :

∀x dans IR ∃! y dans IR, 2 x + 1 = y. ∀ y dans IR ∃ x dans IR, y = 2 x + 1. (x = (y - 1) / 2 convient.)

↳ BIJECTION D' UN ENSEMBLE E SUR UN ENSEMBLE F .

C'est une fonction f à la fois injection et surjection de E sur F.

Cela se traduit par: • ∀ x dans E ∃! y dans F, f(x) = y.

• ∀ y dans F ∃! x dans E, y =f(x). (Existence et unicité d'un antécédent pour chaque élément de F)

Exemple : La fonction f des exemples précédents est une bijection de IR sur IR.

• ∀ x dans IR ∃! y dans IR, 2 x + 1 = y.

• ∀ y dans IR ∃!x dans IR, y = 2 x + 1. (x = (y - 1) / 2 est cet unique antécédent de y)

LOIS DE MORGAN Soit p, q deux propositions.

NON (p ET q) équivaut à (NON p) OU (NON q)

NON (p OU q) équivaut à (NON p) ET (NON q)

Tableaux de vérité

P	q	⌉p	⌉q	(p et q)	⌉(p et q)
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0

P	q	⌉p	⌉q	(p ou q)	⌉(p ou q)
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0

PROPRIETE. Soit p, q, r des propositions.

p ET (q OU r) équivaut à (p ET q) OU (p ET r)

p OU (q ET r) équivaut à (p OU q) ET (p OU r)

Tableaux de vérité

P	q	r	q et r	p ou (q et r)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

p	q	r	P ou q	P ou r	(p ou q) et (P ou r)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

EXERCICES : Partie A

EX.1 : correction   Compléter chaque tableau en mettant les valeurs de vérité.

a.

$2 < 7$	$5 - 3 = 8$	$(2 < 7)$ et $(5 - 3 = 8)$

b.

Soit x=3 $2x+1<7$	Soit x=3, $5x^2-9x-18= 8$	Soit x = 3 ,$2x+1<7$ et $5x^2-9x-18 = 8$

EX.2 : correction   Soit x dans l'ensemble des réels. Donner la contraposée de chaque affirmation.

a. $(x+1)(2x+1) < 0 \Rightarrow (x > -1$ et $x < -1/2)$, où x un réel .

b. $2x^2 - 9x = 0 \Rightarrow (x = 1$ ou $x = 2/3)$, où x un réel .

Rappel: La contraposée de $p \Rightarrow q$ est $\neg q \Rightarrow \neg p$. (Voir cours)

De plus on a : $\neg(p$ ET $q)$ est $\neg p$ OU $\neg q$

$\neg(p$ OU $q)$ est $\neg p$ ET $\neg q$

EX.3: correction

1. Trouver deux autres écritures de l'affirmation:

$2x + 3 > 0 \Rightarrow x + 1 < 0$ où x est dans l'ensemble des réels.

2. En déduire les réels x tels que : $2x + 3 > 0 \Rightarrow x + 1 < 0$

RAPPEL: $p \Rightarrow q$ s'écrit aussi $\neg p$ OU q (Voir cours)

EX.4 : correction   Méthode : COMMENT TESTER, à l'aide de la calculatrice, des affirmations, pour en connaître la valeur de vérité? ♦ TI 84

Ecrire d'abord à l'écran l'affirmation mathématique.

à l'aide de MATH TEST pour avoir $=\ \neq\ >\ \geq\ <\ \leq$

à l'aide de 2nd MATH LOGIC pour

ET remplacé par   and

OU remplacé par or

NON remplacé par not(

ENTER

Apparaît soit 1 si l'affirmation est vraie.

soit 0 si l'affirmation est fausse

APPLICATION : TESTER avec la calculatrice

chaque affirmation du tableau en mettant la valeur de vérité:

$\ln e^2 = 2$	…………………………..
$2 < -3 \Rightarrow 7<4$ c-à-d NON (2 < - 3) ou (7 <4)	…………………………
$e - 3 \neq 0$	…………………………………

EX.5: correction

Soit x dans l'ensemble des réels. Traduire $I\ x - 1\ I < 3$ à l'aide d'un connecteur.

Traduire $I\ x - 2\ I > 1$à l'aide d'un connecteur.

EX.6 : correction Mettre les valeurs de vérité:

	X = 2	X = 1/3	X = - 6
$x^2 \geq x$			
$(1 / x) \leq x$			
$x > -x$			

EX.7 : correction Résoudre dans l'ensemble des réels , $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$.

EX.8 : correction Mettre les valeurs de vérité

$\ln e = 1$	$\ln(1/2) > 0$	$(\ln e = 1)$ OU $(\ln(1/2) > 0$
$(1 / 2) = 2^{-1}$	$\ln(1/2) = -\ln 2$	$(1 / 2) = 2^{-1}$ ET $\ln(1 / 2) = -\ln 2$
$2 < -5$	$7 < 14$	$(2 < -5) \Rightarrow (7 < 14)$
$2 < 3$	$8 < 4$	$(2 < 3) \Leftrightarrow (8 < 4)$
		…

EX.1 : correction Soit la fonction f: $x \rightarrow x^2 - 3x + 1$

1. Quels sont les antécédents de 1 par f ?

2. f est -elle une injection de IR dans IR ?

3. Développer $(x - (3 / 2))^2 - 5 / 4$..

4. - 2 admet-il un antécédent par f dans IR ?

5 . f est-elle une surjection de IR sur IR ?

EX.2 : correction Soit les ensembles E = { a , b , c , d , e } et F = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }

1. Citer une bijection de E sur F.

2. Combien d'applications de E dans F y a-t-il ?

3. Combien d’injections de E dans F y a-t-il

EX.3 : correction Donner la négation de l'affirmation suivante:

Pour tout réel a , $a^2= 4 \Rightarrow (a = 2$ ou $a =- 2)$

EX.4 : correction Montrer que:

Pour tout entier naturel non nul n ,

$1 + ...+ n = n(n + 1))/ 2 \Rightarrow 1 + ...+ (n + 1) = ((n + 1) (n + 2)) / 2$

SUJET 1 : correction

- Qu'est-ce qu'une proposition?

- Soit x dans IR. ($2x^2 - 5x + 4 > 0$) et ($e^{x+1} < 0$) est -elle une proposition vraie?

- Soit x un élément de IR. Exprimer la négation de: $3x + 1 \leq 4$.

- Il existe un entier a tel que $2a + 1$ soit pair.

- Une fonction f , définie sur l'intervalle I, y est toujours croissante ou toujours décroissante.

- Soit deux réels a et b. Donner la contraposée de : $a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$.

- Résoudre dans IR:$(2x - 3)(3 - 5x) = 0$.

- Résoudre dans IR: $(2x - 3)(3 - 5x) < 0$.

A l'aide d'un tableau de vérité comparer les propositions: (NON p) OU q ,NON (p OU q).

P	q	$\rceil$p	($\rceil$p) ou q	p ou q	$\rceil$(p ou q)
0	0	…	…	…	…
0	1	…	…	…	…
1	0	…	…	…	….
1	1	…	…	…	…

Conclure: .

- A-t-on pour tout entier n l'inégalité $n^2 - n + 1 \geq 0$?

- Exprimer la négation de :

- Pour tout réel y il existe au moins un réel x tel que $2x + 3 = y$.

- Si x est le carré d'un nombre alors x est positif ou nul.

- Pour tout réel x il existe un entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

SUJET 2 correction

..•Donner une proposition ainsi que sa négation:

•Soit x dans IR. Résoudre ($2x + 3 < 0$ ou $x + 1 \geq 0$) .

•Soit x dans IR. Résoudre $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0$

• Résoudre dans IR , $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$.

• Résoudre dans IR , $(4 - 5x)(2x + 3) \leq 0$.

•Donner la négation de : $\forall y \in \mathbb{R}^+ \ \exists x \in \mathbb{R} \ , |x| = y$.

Cette proposition est-elle vraie? Justifier.

•Donner le sens de variation de la fonction $f : x \to x^4 + 3x^3 + 1$.

• Soit p et q deux propositions. Donner une proposition équivalente à : p et (p ou q)• $\overline{p}$ et($\overline{p \text{ et } q}$)

•Soit deux réels x et y .

• Traduire ($2x - 5y = 3$ et $-4x + 6 = -10y$)

Résoudre dans IR² : $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -4x + 6 = -10y \end{cases}$

SUJET n°3 correction

•Résoudre dans IR : $2x + 1 > 0 \Rightarrow 2 - x < 0$.

• Soit a et b deux réels.

•Traduire avec un connecteur $(a, b) \neq (0, -1)$.

• Traduire avec un connecteur $a \times b = 0$.

•Compléter le tableau de vérité. (LOIS de MORGAN)

p	q	$\rceil$p	$\rceil$q	p ou q	$\rceil$(p ou q)	($\rceil$p) et ($\rceil$q)	p et q	$\rceil$(p et q)	($\rceil$p) ou ($\rceil$q)
0	0								
0	1								
1	0								
1	1								

A-t-on Non (p ou q) logiquement équivalent à (Non p) et (Non q) ?

A-t-on Non (p et q) logiquement équivalent à (Non p) ou (Non q) ?

• Donner la négation de la proposition: $x + 3 < 0 \Rightarrow 5 - 2x \geq 0$.

(On pourra utiliser ce qui précède.)

• Soit la phrase" Pour tout réel x il existe un entier relatif n

tel que $n \leq x$ et $x < n + 1$ "

• Traduire de façon symbolique cette phrase

• Donner sa négation:

• Soit x dans l'intervalle] 0 , +∞ [.Compléter le tableau:

$2x + 1 > 0$	$x + 3 < 0$	$2x + 1 > 0 \Rightarrow x + 3 < 0$

• Donner la négation de la proposition:

$\forall\ a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{R}\ ,\ a < 2b$

• Résoudre dans IR l'inégalité suivante $(2x + 1)(x + 1) < 0$.

Correction EXERCICES Partie A

1. EX. Compléter chaque tableau en mettant les valeurs de vérité.

a.

$2<7$	$5-3=8$	$(2<7)$ et $(5-3=8)$
1	0	0

b.

Soit x=3 $2x+1<7$	Soit x=3, $5x^2-9x-18=8$	Soit x = 3 , $2x+1<7$ et $5x^2-9x-18=8$
0	0	0

2\. EX . Soit x dans l'ensemble des réels. Donner la contraposée de chaque affirmation.

a. $(x+1)(2x+1)<0 \Rightarrow (x>-1 \text{ ET } x<-1/2)$, où x un réel .

Cela équivaut à: NON($x>-1$ ET $x<-1/2$) => NON $(x+1)(2x+1)<0$

C.-à-d. ($x \leq -1$ OU $x \geq -1/2$) => $(x+1)(2x+1) \geq 0$

b. $2x^2 - 9x = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ OU } x = 2/3)$, où x un réel .

Cela équivaut à: NON ($x = 1$ OU $x = 2/3$) => NON ($2x^2 - 9x = 0$)

C.-à-d. ($x \neq 1$ ET $x \neq 2/3$) => $2x^2 - 9x \neq 0$

3\. EX.

1\. Trouver deux autres écritures de l'affirmation:

$2x+3>0 \Rightarrow x+1<0$, où x est dans l'ensemble des réels.

$2x+3 \leq 0$ OU $x+1<0$ mais encore $x+1 \geq 0 \Rightarrow 2x+3 \leq 0$

2\. En déduire les réels x tels que : $2x+3>0 \Rightarrow x+1<0$.

C.-à-d. $x \leq -3/2$ OU $x<-1$ Tous les réels inférieurs strictement à - 1 conviennent.

4\. EX. INFORMATION: Comment tester , à l'aide de la calculatrice, des affirmations, pour en connaître la valeur de vérité?

♦ <u>TI 84</u>

Ecrire d'abord à l'écran l'affirmation mathématique.

À l'aide de MATH TEST pour avoir = ≠ > ≥ < ≤

À l'aide de 2nd MATH LOGIC pour

ET remplacé par and

OU remplacé par or

NON remplacé par not (

ENTER <u>Apparaît</u> soit 1 si l'affirmation est vraie.

Soit 0 si l'affirmation est fausse

APPLICATION :TESTER avec la calculatrice chaque affirmation du tableau en mettant la valeur de vérité:

$\ln e^2 = 2$	……………………1……..
2 < -3 => 7<4 c-à-d NON (2 < - 3) ou (7 <4)	……………………1……
e- 3 ≠ 0	………………………..1………

5. EX. Soit x dans l'ensemble des réels.

Traduire Ix -1I < 3 à l'aide d'un connecteur -2 < x et x < 4

Traduire Ix -2I > 1 à l'aide d'un connecteur. X < 1 ou x > 3

6. EX. Mettre les valeurs de vérité:

	X = 2	X = 1/3	X = - 6
$x^2 \geq x$	1	0	1
(1 / x) ≤ x	1	0	0
x > - x	1	1	0

7.EX . Résoudre dans l'ensemble des réels, $x^2=4$ => x = 2. C.-à-d. x ≠ 4 OU x = 2

C.-à-d. (x ≠ 2 ET x ≠ - 2) OU x =2

C.-à-d. (x ≠ 2OU x = 2) ET (x ≠ - 2 OU x= 2)

C.-à-d. seulement (x ≠ - 2 OU x= 2)

Tous les réels autres que -2 conviennent.

ln e = 1	ln (1/2) > 0	(ln e = 1) OU (ln (1/2)>0
1	0	1
$(1 / 2) = 2^{-1}$	ln(1/2)=-ln 2	$(1 / 2) = 2^{-1}$ et ln (1 / 2) = - ln 2
1	1	1
2 <- 5	7< 14	(2 < - 5) => (7< 14)
0	1	1
2 < 3	8 < 4	(2 < 3) <=>(8 < 4)
1	0	0

8. . Mettre les valeurs de vérité

EX.1 . **Considérons pour cela $f(x) = 1$.**

C.-à-d. $x^2 - 3x + 1 = 1$

C.-à-d. $x^2 - 3x = 0$ c.-à-d. $x(x - 3) = 0$

C.-à-d. $x = 0$ ou $x = 3$

Conclusion : <u>1 admet deux antécédents par f qui sont 0 et 3.</u>

2. <u>Non. f ne peut pas être une injection</u>.

Contre exemple $0 \neq 3$ Or $f(0) = f(3) = 1$ f ne conserve pas la distinction.

3. Développons $(x - 3/2)^2 - 5/4$.

$(x - 3/2)^2 - 5/4 = x^2 - 2 \times (3/2)x + (3/2)^2 - 5/4$

c.-à-d. $(x - 3/2)^2 - 5/4 = x^2 - 3x + 9/4 - 5/4$

Conclusion: $(x - 3/2)^2 - 5/4 = x^2 - 3x + 1$

4. Regardons si $f(x) = -2$ admet une solution.

Considérons $(x - 3/2)^2 - 5/4 = -2$

C.-à-d. $(x - 3/2)^2 - 5/4 + 8/4 = 0$

C.-à-d. $(x - 3/2)^2 + 3/4 = 0$

C'est impossible car $(x - 3/2)^2 + 3/4 >= 3/4$

Conclusion : - 2 n'admet aucun antécédent par f.

4. NON. f n'est pas une surjection de IR sur IR.

- 2 par exemple n'admet aucun antécédent par f.

EX .2 1. Citons une bijection de E sur F.

Soit l'application de E dans F définie par:

$f(a) = 1$ $f(b) = 2$ $f(c) = 3$ $f(d) = 4$ $f(e) = 5$

Tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E .

L'antécédent de 1 est a.

L'antécédent de 2 est b.

etc ... .

L'antécédent de 5 est e. Conclusion : <u>On a bien donné une bijection de E sur F</u>.

2. Dénombrons les applications de E sur F

Schema: <u>I 5 I 5 I 5 I 5 I 5 I</u>

Il y a cinq images possibles pour a, cinq images possibles pour b, etc ......,

Cinq images possibles pour e. D'après le " principe multiplicatif " il y a $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$ applications de E dans F. Conclusion: <u>Il y a 3125 aplication de E dans F.</u>

3. Dénombrons les injections de E dans F.

Schema: <u>I 5 I 4 I 3 I 2 I 1 I</u> Comme il a conservation de la distinction :Il y a cinq images possibles pour a. Il n'y a plus ensuite que quatre images possibles pour b.

Il n'y a plus alors que trois images possibles pour c.

Puis il n'y a plus que deux images possibles pour d

Enfin il n'y a plus qu'une image possible pour e.

D'après le " principe multiplicatif " il y a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ Injections de E dans F.

Conclusion: <u>120 injections sont possibles de E dans F</u>

EX.3Il existe au moins un réel a, $a^2 = 4$ et NON ($a = 2$ ou $a = -2$)

Conclusion: La négation est:

Il existe au moins un réel a, $a^2 = 4$ et $a \neq 2$ et $a \neq -2$.

On a utilisé le fait que la négation de p => q, est la négation de NON(p) ou q,

C.-à-d. p ET NON(q).

EX.4 On a : $1 + ...+ n = n(n + 1)) / 2$ Donc en ajoutant $n + 1$ à chaque membre il vient:

$1 + ...+ n + (n+ 1) = n(n + 1))/ 2 +(n+ 1)$

Donc $1 + ...+ (n + 1) = 1 + ...+ n + (n+ 1) = n(n + 1)) / 2 +(n+ 1)$

Par réduction au même dénominateur on a:

$1 + ...+ (n + 1) = (n (n + 1) + 2(n + 1)) / 2$

Puis par factorisation de $n + 1$ on a :

$1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n + 1) = ((n + 1)(n + 2)) / 2$

Conclusion : **<u>L'implication est avérée.</u>**

CORRECTION SUJET 1

- **Qu'est-ce qu'une proposition? Enoncé mathématique qui est sans hésitation soit vrai soit faux.**

- **Soit x dans IR. ($2x^2 - 5x + 4 > 0$) ET ($e^{x+1} < 0$) est -elle une proposition vraie? NON.**

$e^{x+1} < 0$ est fausse.

- **Soit x un élément de IR. Exprimer la négation de: $3x + 1 \leq 4$ C'est $3x + 1 > 4$**

- **Il existe un entier a tel que $2a + 1$ soit pair. Pour tout réel a , $2a + 1$ est impair**

- **Une fonction f , définie sur l'intervalle I, y est toujours croissante ou toujours décroissante.**

Une fonction f , définie sur l'intervalle I, n'y est pas toujours croissante ou toujours décroissante.

- **Soit deux réels a et b. Donner la contraposée de : $a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$. $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$**

- **Résoudre dans IR: $(2x - 3)(3 - 5x) = 0$. C.-à-d. $-10(x - 3/2)(x - 3/5) = 0$. $S_{IR} = \{3/2 ; 3/5\}$**

- **Résoudre dans IR: $(2x - 3)(3 - 5x) < 0$. c.-à-d. $-10(x - 3/2)(x - 3/5) < 0$.**

C.-à-d. $x < 3/5$ ou $x > 3/2$ (On peut aussi faire un tableau) (Règle des signes.)

- **A l'aide d'un tableau de vérité comparer les propositions:(NON p) OU q , NON (p OU q).**

P	q	$\urcorner p$	$(\urcorner p)$ ou q	p ou q	$\urcorner$(p ou q)
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

Conclure: Elles ne sont pas équivalentes.

A-t-on pour tout entier n l'inégalité $n^2 - n + 1 \geq 0$? OUI

$\Delta = b^2 - 4ac = -3$ $\Delta < 0$ Donc $n^2 - n + 1$ est toujours du signe de a

Or $a = 1$ Donc $n^2 - n + 1$ est toujours du signe positif.

- **Exprimer la négation de :**

- **Pour tout réel y il existe au moins un réel x tel que $2x + 3 = y$.**

Il existe au moins un réel y tel que pour tout réel x, $2x + 3 \neq y$.

• **Si x est le carré d'un nombre alors x est positif ou nul.**

p => q équivaut à (NON p) OU q.

Ainsi la négation de p => q est: (p et (NON q)).

On obtient pour le résultat cherché:

x est le carré d'un nombre ET x n'est pas positif ou nul.

• **Pour tout réel x il existe un entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.**

Comme $n \leq x < n + 1$ s'écrit ($n \leq x$ ET $x < n + 1$) la négation cherchée est:

Il existe au moins un réels x tel que pour tout entier relatif n on ait $x < n$ OU $x \geq n + 1$

Correction SUJET 2

..•Donner une proposition ainsi que sa négation: $47 > -5$ Sa négation est : $47 \leq -5$

•Soit x dans IR. Résoudre ($2x + 3 < 0$ ou $x + 1 \geq 0$) .

C.-à-d. $x < -3/2$ ou $x \geq -1$

Conclusion: $S_{IR} =]-\infty, -3/2[\cup [-1, +\infty[$

• **Soit x dans IR. Résoudre $2x + 3 \geq 0$ => $x + 1 \geq 0$.**

C.-à-d. $x \geq -3/2$ => $x \geq -1$

C.-à-d. $x < -1$ ou $x < -3/2$(contraposée)

Conclusion: $S_{IR} =]-\infty, -1[$

• **Résoudre dans IR, $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$.**

$3 - 7 + 4 = 0$. La somme des coefficients est nulle.

Donc : 1 est une racine évidente de $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

L'autre racine est donc le produit des racines c-à-d $c/a = 4/3$

$a = 3$ Donc $a > 0$. Nous voulons que $3x^2 - 7x + 4$ soit du signe de $-a$.

Donc nous devons prendre x entre les racines (en les acceptant comme l'inégalité est large.)

Conclusion: $S_{IR} =]4/3 ; 1[$

• **Résoudre dans IR, $(4 - 5x)(2x + 3) \leq 0$.................................**

c.-à-d. $-5(x - 4/5)\ 2(x + 3/2) \leq 0$.

c.-à-d. $(x - 4/5)(x + 3/2) \geq 0$ en divisant par - 10.

$4/5$ et $-3/2$ sont les racines de $(x - 4/5)(x + 3/2) = 0$

a = 1 Donc a > 0.

Nous voulons que $(x - 4/5)(x + 3/2)$ soit du signe de a.

Nous devons prendre x à l'extérieur des racines.

Conclusion: $S_{IR} =]-\infty, -3/2] \cup [4/5, +\infty[$

•Donner la négation de : $\forall y \in \mathbb{R}^{+} \ \exists x \in \mathbb{R}, |x| = y$.

$\exists y \in \mathbb{R}^{+} \ \forall x \in \mathbb{R}, |x| \neq y$.

Cette proposition est-elle vraie? Justifier. OUI. x = y convient

•Donner le sens de variation de la fonction $f : x \rightarrow x^4 + 3x^3 + 1$.

f est définie et dérivable dans IR.

$f' : x \rightarrow 4x^3 + 9x^2$

Donc $f' : x \rightarrow (4x + 9)x^2$

$f'(x)$ est du signe de $4x + 9$.

$f'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = -9/4$

Conclusion : f est décroissante sur $]-\infty, -9/4]$

f est croissante sur $[-9/4, +\infty[$

• Soit p et q deux propositions. Donner une proposition équivalente à :

• p et (p ou q) p c.-à-d. (p et p) ou (p et q)

C.-à-d. p ou (p et q)

• $\overline{p}$ et ($\overline{p \text{ et } q}$) Non P c.-à-d. Non p et (Non p ou Non q)

•Soit deux réels x et y .

Traduire ($2x - 5y = 3$ et $-4x + 6 = -10y$)

On a le système: $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -4x + 6 = -10y \end{cases}$

• Résoudre dans IR^2 : $L_2 \leftarrow (-1/2) L_2$ On a :

$2x - 5y = 3$ $\quad L_1$

$2x - 3 = 5y$ $\quad L_2$

Les deux équations sont les mêmes. Conclusion: $S_{IR^2} = \{ (x, y) \text{ dans } IR^2 / 2x - 5y = 3 \}$

Correction sujet n° 3

• Résoudre dans IR : $2x + 1 > 0 \Rightarrow 2 - x < 0$.

C.-à-d. $x > -1/2 \Rightarrow x > 2$

C.-à-d. $x \leq -1/2$ ou $x > 2$

$S =]-\infty, -1/2] \cup]2, +\infty[$

• Soit a et b deux réels.

• • Traduire avec un connecteur $(a, b) \neq (0, -1)$.

$a \neq 0$ ou $b \neq -1$

Traduire avec un connecteur $a \times b = 0$. $a = 0$ ou $b = 0$

• Compléter le tableau de vérité. (LOIS de MORGAN)

p	q	⌉p	⌉q	p ou q	⌉(p ou q)	(⌉p) et (⌉q)	p et q	⌉(p et q)	(⌉p) ou (⌉q)
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

A-t-on Non (p ou q) logiquement équivalent à (Non p) et (Non q) ? OUI.............

A-t-on Non (p et q) logiquement équivalent à (Non p) ou (Non q) ? OUI.............

• Donner la négation de la proposition: $x + 3 < 0 \Rightarrow 5 - 2x \geq 0$.

(On pourra utiliser ce qui précède.)

On a: Non$(x + 3 < 0)$ ou $5 - 2x \geq 0$

La négation est donc : $x + 3 < 0$ et Non $(5 - 2x \geq 0)$

C.-à-d. $x < -3$ et $5 - 2x < 0$

C.-à-d. $x < -3$ et $x > 5/2$

$x < -3$ et $x > 5/2$

• Soit la phrase" Pour tout réel x il existe un entier relatif n tel que $n \leq x$ et $x < n + 1$ "

Traduire de façon symbolique cette phrase.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$

• • **Donner sa négation:**

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}\ \ n > x \ \ ou\ x \geq n+1$

• **Soit x dans l'intervalle] 0, +∞ [.Compléter le tableau:**

2 x + 1 >0	x+ 3< 0	2 x + 1 >0 => x+ 3<0
1	0	0

• **Donner la négation de la proposition:**

$\forall\ a \in \mathbb{N}\ \ \exists b \in \mathbb{R}, a < 2b$

La négation est : $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{R}\ \ a \geq 2b$

• **Résoudre dans IR l'inégalité suivante (2 x + 1) (x + 1) < 0**

(2 x + 1) (x + 1) est une forme factorisée d'un trinôme du second degré qui s'annule

quand x = - 1/2 ou x = - 1 Avec un tableau de signe on a:

S =] - 1 , - 1 / 2 [