Les graphes ***BTS SIO2***

Prérequis

- Calcul matriciel
- Calcul booléen

Objectifs

- Initiation aux graphes orientés
- Mise en œuvre, d'algorithmes permettant d'obtenir les chemins de longueur *p*, la fermeture transitive, les niveaux et chemin de valeur minimale

1. Graphes simples orientés

a) Graphe – représentation sagittal
b) Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit chemin hamiltonien
c) Prédécesseurs – successeurs
d) Matrice adjacente
e) Niveau des sommets d'un graphe
f) Arborescence

2. Opérations sur les matrices adjacentes

a) ***Somme, produit et puissance des matrices***
b) ***Somme, produit et puissance booléens des matrices***
c) ***Fermeture transitive d'un graphe***

3. Graphes valués

a) Définition
b) Chemin minimal – chemin maximal

4. La méthode Per

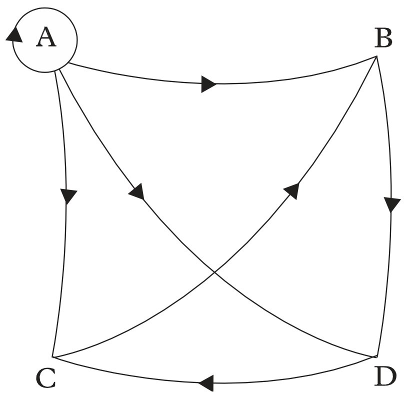
1. Graphes simples orientés

a- Graphe – représentation sagittale

Exemple

On considère l'ensemble S = {A, B, C, D} où A, B, C et D sont 4 points du plan.

L'ensemble G = {(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)}, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe** sur S.



Les couples de G sont représentés par des arcs orientés. Le schéma ci-dessus est la **représentation sagittale** de G (ou représentation par points et flèches).

b- Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Pour la représentation sagittale donnée ci-dessus :

Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés ***sommets*** *et les couples de G sont appelés* ***arcs****.*

(A, D) est un ***chemin de longueur 1*** *qui va de A à D et (A, B, D, C) est un* ***chemin de longueur 3*** *qui va de A à C.*

Le chemin (A , A) est appelé une ***boucle****. Le chemin (**B**, D, C, **B**) est un* ***circuit****.*

(A, B, D, C) est un chemin de longueur 3 qui passe par tous les sommets du graphe, et ne passe qu'une fois par chacun d'eux : (A, B, D, C) est un chemin ***hamiltonien****.*

Exercice 1

c) - Prédécesseurs – successeurs

Définition

Si (A, B) est un arc d'un graphe alors on dira que A est un **prédécesseur** de B et que B est un **successeur** de A.

L'ensemble des **prédécesseurs** d'un sommet A est noté $\Gamma^{-}(A)$ et l'ensemble des **successeurs** d'un sommet A est noté $\Gamma^{+}(A)$.

Exemple

Pour la représentation sagittale donnée au paragraphe 1A on aura ainsi :

Sommets	**Successeurs** $\wp^{+}$	**Prédécesseurs** $\wp^{-}$
A B C D	A, B, C, D D	A (A, C) (A, D) (A, B)

$\Gamma^{-}(A) = \{A\}$ et $\Gamma^{+}(A) = \{A, B, C, D\}$

Exercice 2

d)- ***Matrice adjacente***

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Exemple

Pour le graphe G du paragraphe 1A. on aura ainsi :

Il y a un arc (A, B)

Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	1	0	0
D	0	0	1	0

Il n'y a pas d'arc (B, A)

On appelle alors **matrice adjacente** M associée au graphe pour les sommets A, B, C et D dans cet ordre, la matrice **booléenne :**

$$M = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}}^{\text{Successeurs}} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \left.\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\right\} \text{Prédécesseurs}$$

Exercice 3

e)- Niveau des sommets d'un graphe

Les graphes simples sans circuits (donc sans boucles) peuvent être ordonnés par niveau.

Définition

On appelle sommets de niveau 0 dans un graphe simple orienté, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur.

Si l'on note S_0 l'ensemble des sommets de niveau 0, on appellera sommets de niveau 1, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur dans $S - S_0$ et ainsi de suite.

Exemple

On considère le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs / **Prédécesseurs**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
B	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
C	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
D	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
	0	**1**	**1**	**0**	**0**

Le premier tableau ci-dessous présente les prédécesseurs de chaque sommet :

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	A
E	A

Le sommet A n'a pas de prédécesseur, il est donc de niveau 0 et $S_0 = \{A\}$.

Le tableau ci-dessous présente les prédécesseurs de tous les sommets sauf A (sommet de niveau 0) :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	B, E
D	aucun
E	aucun

Les sommets D et E n'ont pas de prédécesseur dans $S - S_0$, ils sont donc de niveau **1** et $S_1 = \{D, E\}$.

Le troisième tableau ci-dessous présente les prédécesseurs de tous les sommets sauf A (sommet de niveau 0), D et E (sommets de niveau 1) :

Sommets	Prédécesseurs
B	aucun
C	B

Le sommet B n'a pas de prédécesseur dans $S - S_0 \cup S_1$, il est donc de niveau **2** et $S_2 = \{B\}$.

Et pour terminer, considérons le tableau ci-dessous qui présente les prédécesseurs de tous les sommets sauf A (sommet de niveau 0) ; D, E (sommets de niveau 1) et B de niveau 2 :

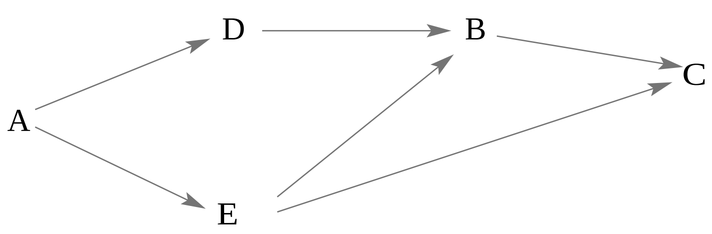
Sommet	Prédécesseur
C	aucun

Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S - S_0 \cup S_1 \cup S_2$, il est donc de niveau **3** et $S_3 = \{C\}$.

On effectuera ces démarches dans un seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
A	aucun	A			
B	~~D~~, ~~E~~			B	
C	B, ~~E~~				C
D	~~A~~		D		
E	~~A~~		E		

D'où la représentation du graphe, ordonné par niveaux :



Exercice 4

f) ***Arborescence***

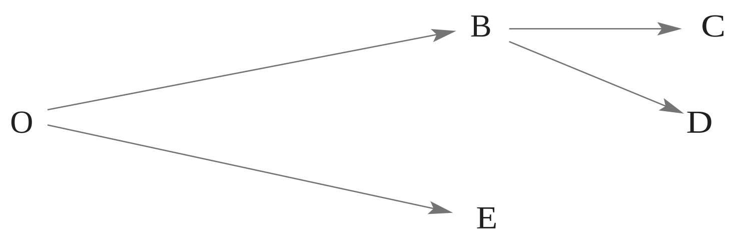
Définition

Soit G un graphe défini sur un ensemble S et O un sommet de S.

Si
- O est un sommet de niveau 0
- Il existe un chemin allant de O à M
- tout sommet M, différent de O, n'a qu'un seul prédécesseur différent de M

alors on dira que G est une **arborescence**.

Exemple



Successeurs / Prédécesseurs	O	B	C	D	E
O	0	1	0	0	1
B	0	0	1	1	0
C	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0

Remarque

Une arborescence ne peut comporter ni boucle ni circuit.

2. Opérations sur les matrices adjacentes

a) ***Somme, produit et puissance des matrices***

Les opérations somme, produit et puissance des matrices ont été définies dans le cours de 1re année séquence « Calcul Matriciel ». On les note A + B, A $\times$ B et A^n.

Propriété

Soit M la matrice adjacente associée à un graphe.
Le coefficient m_{ij} de la matrice M^n indique le nombre de **chemins de longueur *n*** reliant le *i*-ième prédécesseur au *j*-ième successeur.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée au graphe du paragraphe 1.A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \overset{m_{12}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_{11} = 1$ indique qu'il existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.

$m_{12} = 2$ indique qu'il existe 2 chemins de longueur 2 reliant A à B.

$m_{21} = 0$ indique qu'il n'existe pas de chemin de longueur 2 reliant B à A. Etc.

Chemins de longueur 2

En lisant les lignes de M^2 : il existe 1+2+2+2 chemins de longueur 2 partant de A, 1 chemin de longueur 2 partant de B, etc. Et au total 10 chemins de longueur 2.

En lisant les colonnes de M^2 : il existe 1+0+0+0 chemins de longueur 2 arrivant en A, 2+0+0+1 chemins de longueur 2 arrivant en B, etc.

Chemins de longueur 3

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A, 1 chemin de longueur 3 partant de B, etc. Et au total 13 chemins de longueur 3.

Il existe 1 chemin de longueur 3 arrivant en A, 4 arrivant en B, etc.

Exercice 5

b) **_Somme, produit et puissance booléens des matrices_**

Définition

Soient M et M’ deux matrices booléennes. La somme booléenne des matrices M et M’, notée M⊕M’, est la matrice obtenue en effectuant la somme booléenne des coefficients de M et M’.

On définit de façon analogue le produit M⊗M’ et la puissance *n*-ième booléenne d’une matrice M, notée $M^{[n]}$: $M^{[n]} = M\otimes M\otimes\ldots\otimes M$ (M est présente *n* fois).

Rappel

Pour les constantes booléennes 0 et 1 : 0+0=0 1+0=1 1+1=1

0.0=0 1.0=0 1.1=1

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques

Soit M une matrice quelconque. Alors :

1. On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée.

2. Pour déterminer $M^{[n]}$ on pourra soit déterminer $M^n = M\times M\times\ldots\times M$ (M étant pré- sente n fois) puis prendre la matrice booléenne $M^{[n]}$ associée, soit déterminer directe- ment $M^{[n]} = M^{[1]} \otimes M^{[1]} \otimes \ldots \otimes M^{[1]}$ ($M^{[1]}$ étant présente n fois).

Exemples

1. Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ou encore $M^{[2]} = M^{[1]} \otimes M^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Propriété (admis)

Un coefficient non nul de $M^{[n]}$ indique qu'il existe au moins un **chemin de longueur *n*** reliant deux points du graphe.

Exemple

Reprenons le graphe défini au paragraphe 1A.

Existence de chemins de longueur 2

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins allant de A vers A, B, C et D, allant de B vers C, etc. Il y a au total 7 couples de points que l'on peut relier par des chemins de longueur 2.

Existence de chemins de longueur 3

$$M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il n'existe pas de chemin de longueur 3 allant de B vers A, C et D, etc.

Exercice 7

c) • ***Fermeture transitive d'un graphe***

Définition

On appelle **fermeture transitive** du graphe G le graphe noté $\hat{G}$ (lire « G chapeau ») obtenu en complétant G par tous les arcs (X, Y) **lorsqu'il existe un chemin quelconque allant de X à Y** dans G.

Remarque

On a évidemment $G \subset \hat{G}$.

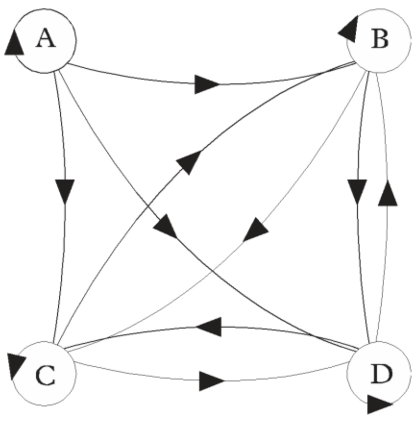
Exemple

On considère le graphe G = {(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)} défini sur l'ensemble S = {A, B, C, D}.

On obtient $\hat{G}$ en complétant G par les 6 arcs (B, B); (B, C); (C, C); (C, D); (D, B); (D, D).

$\hat{G}$ = {(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B); (B, B); (B, C); (C, C); (C, D); (D, B); (D, D)}

Le graphique ci-dessous donne la **représentation sagittale** de G (« flèches pleines ») et celle de $\hat{G}$ (« flèches pleines » + « flèches en pointillés »).



Exercice 8

Propriété

Si G est un graphe simple orienté à ***n* sommets** de matrice M alors $\hat{G}$ a pour matri- ce adjacente :

$$\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus K \oplus M^{[n]}$$

Exemple

Matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G du paragraphe 1.A. Le graphe comportant n=4 sommets on calcule :

$$\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifiera sur la figure précédente que (B, A), (C, A) et (D, A) $\notin \hat{G}$

Exercice 9

3. Graphes valués

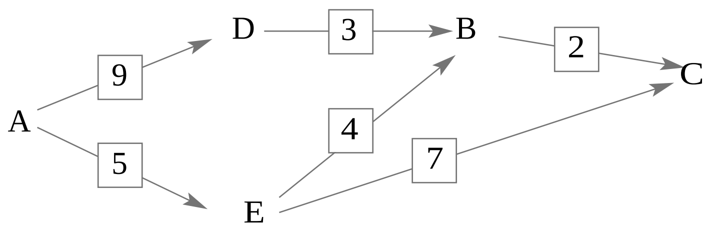
a. *Définitions*

Définition

On appelle **graphe valué** un graphe dans lequel chaque arc est affecté d'une valeur.
On appelle **valeur d'un chemin** la somme des valeurs des arcs qui le composent.

Exemple

Le graphe simple orienté et **valué** ci-dessous, ordonné par niveaux, indique la durée des trajets entre cinq villes A, B, C, D et E.



Le chemin (A, D, B, C) a pour longueur 3 et pour valeur 14. Le chemin (A, E, C) a pour longueur 2 et pour valeur 12.

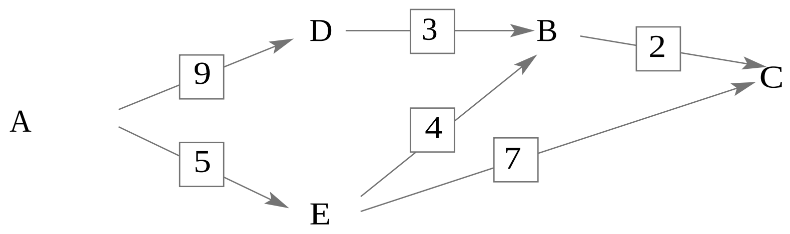
Pour un graphe **dont tous les arcs ont la valeur 1**, la longueur d'un chemin et sa valeur sont identiques.

b) . *Chemin minimal – chemin maximal*

Définitions

Parmi tous les chemins menant d'un sommet A à un sommet B, on appelle :
– **chemin minimal** un chemin dont la valeur est minimale ;
– **chemin maximal** un chemin sans circuit dont la valeur est maximale ;
– **chemin optimal** tout chemin minimal ou maximal.

Exemple



Pour aller de A à C :
– le chemin (A, D, B, C), de longueur 3 et de valeur 14, est un chemin maximal ;
– le chemin (A, E, B, C), de longueur 3 et de valeur 11, est un chemin minimal ;
– le chemin (A, E, C), de longueur 2 et de valeur 12, n'est pas un chemin optimal.

Propriété

Tout chemin optimal est composé de chemins eux-mêmes optimaux.

Remarque

La recherche des chemins minimaux effectuée sur les graphes ordonnés par niveaux est proposée en travaux pratiques.

4. La méthode PERT

La méthode PERT (Program Evaluation ResearchTask) est une méthode **d'ordonnancement** et **d'optimisation** pour la réalisation de projets comportant un grand nombre de tâches.

Cette méthode, mise au point aux USA pour la réalisation du programme des fusées Polaris, utilise les graphes orientés. Elle permet par exemple de planifier des travaux de construction de maisons, de navires, d'avions …

Les graphes qui en découlent décrivent des **tâches** et des **étapes**. On parle de ***graphes*** ou de ***réseaux*** PERT.

<u>Définitions</u>

On appelle **tâche** le déroulement dans le temps d'une opération. On appelle **étape** le commencement ou la fin d'une tâche.

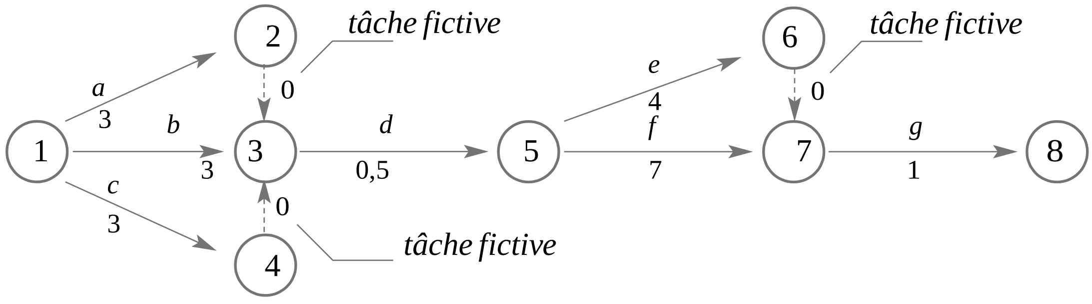
Exemple 1

La construction de 2 immeubles doit être réalisée à partir des 2 projets choisis parmi 3 conçus simultanément. La planification des travaux nécessite les tâches ci-dessous :

a : conception du projet 1 (durée : 3 mois) *b* :
conception du projet 2 (durée : 3 mois) *c* :
conception du projet 3 (durée : 3 mois)
d : analyse et choix des 2 projets (durée : 15 jours)
e : réalisation de l'immeuble 1 (durée : 4 mois)
f : réalisation de l'immeuble 2 (durée : 7 mois)
g : réception des travaux / reprise de finitions (durée : 1 mois)

Le graphe PERT correspondant, exprimé en mois, est donné ci-dessous :

Le graphe PERT correspondant, exprimé en mois, est donné ci-dessous :



Remarques

1. Une tâche est représentée par une et une seule flèche sur laquelle sont indiquées la tâche à effectuer (représentée par une lettre) et la durée de réalisation de celle-ci.

2. Une étape est de durée nulle. Elle est représentée par un cercle ou un rectangle numéroté, à partir de 1, en respectant les niveaux du graphe.

3. Deux tâches se déroulant de façon simultanée sont représentées par deux flèches distinctes.Les étapes finales correspondantes sont alors reliées par une étape dite fictive.

Par exemple les tâches *a*, *b* et *c* sont simultanées. Les étapes 2 et 3, ainsi que 3 et 4 sont reliées par une tâche fictive de durée nulle : la tâche *d* ne pourra donc commencer avant que les tâches *a*, *b* et *c* ne soient achevées.

De même la tâche *g* ne pourra pas commencer avant que les tâches *e* et *f* ne soient achevées

Exemple 2

Pour la conception et la réalisation d'un nouveau produit une entreprise estime qu'el- le doit réaliser les 10 tâches *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *j* et *k* en tenant compte de l'ordre et des durées indiquées ci-dessous :

Tâches	*Durée des tâches en jours*	*Tâches antérieures*
a	1	-
b	2	-
c	6	*d*
d	3	-
e	4	*a*
f	1	*b*
g	4	*f*, *j*
h	5	*g*, *c*
j	3	*a*
k	6	*e*

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes comme ci-dessous :

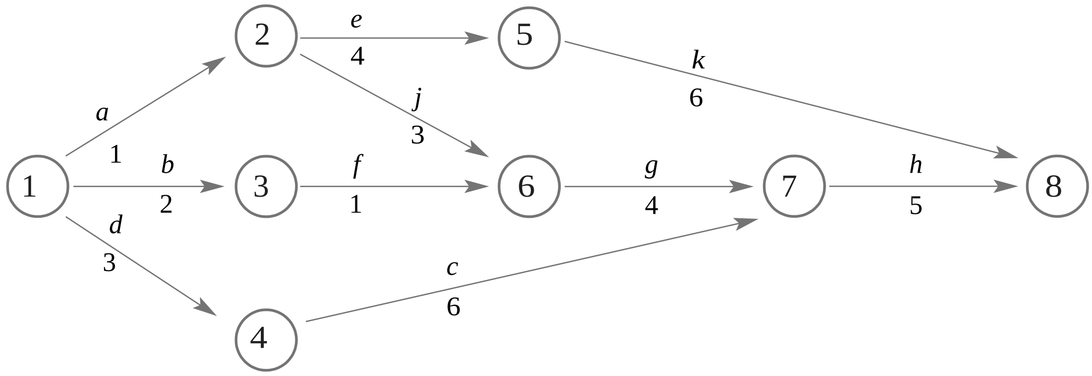
Étape 1 : On ordonne les tâches (arcs) par niveaux

Tâches	*Tâches antérieures*	*niveau 0*	*niveau 1*	*niveau 2*	*niveau 3*
a	-	*a*	-	-	-
b	-	*b*	-	-	-
c	*d*	-	*c*	-	-
d	-	*d*	-	-	-
e	*a*	-	*e*	-	-
f	*b*	-	*f*	-	-
g	*f*, *j*	-	-	*g*	-
h	*g*, *c*	-	-	-	*h*

j	a	-	j	-	-
k	e	-	-	k	-

Étape 2 : On représente le graphe associé

Les étapes initiales de chaque tâche sont classées par niveaux. On numérote les tâches.

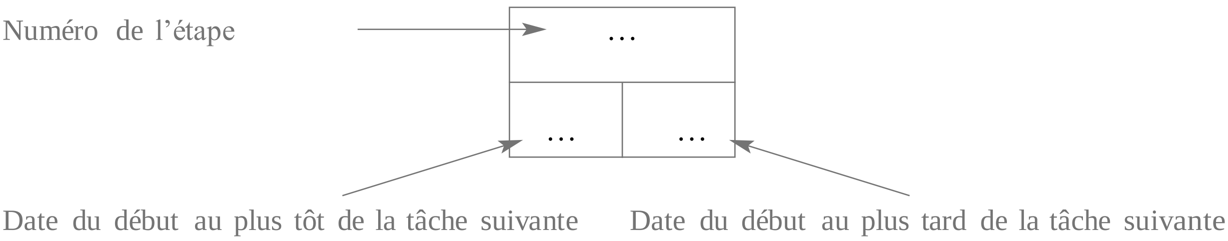


Les étapes 2, 3 et 4 sont les étapes initiales des tâches de niveau 2. Les étapes 5 et 6 sont les étapes initiales des tâches de niveau 3.

Les tâches finales doivent se rejoindre en une même étape.

Étape 3 : On calcule les dates de début au plus tôt et au plus tard de chaque tâche

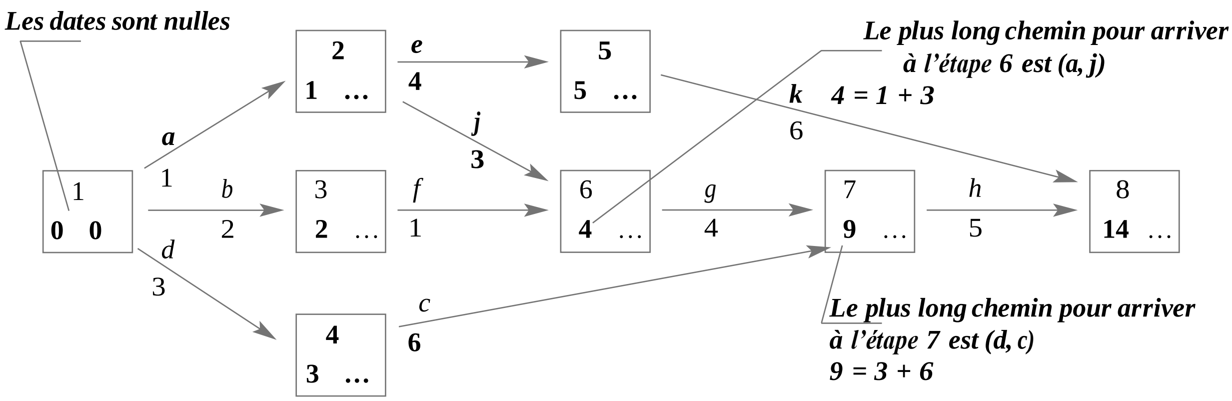
Ces dates sont indiquées sur chaque étape.



Pour l'étape 1 ces dates sont nulles.

Étape 3.1 : Date de début au plus **tôt** d'une tâche

Pour chaque étape c'est la ***longueur du plus long chemin pour y arriver***.



Le projet peut être réalisé en 14 jours.

Étape 3.2 : Date de début au plus **tard** d'une tâche

C'est la date au-delà de laquelle le projet ne peut avoir que du retard.

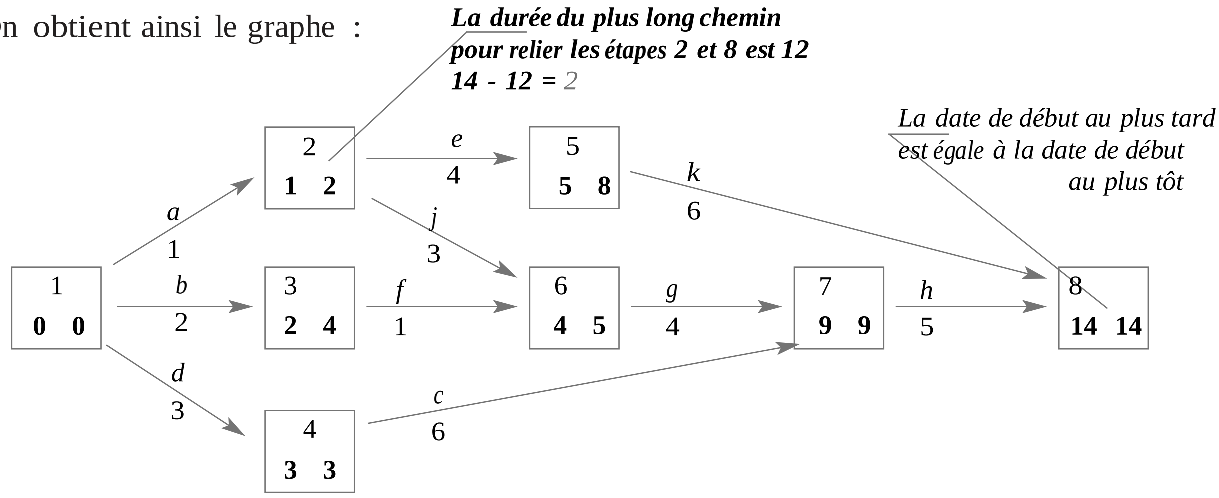
• Pour l'étape terminale la date de début au plus tard est égale à la date de début au plus tôt.

• Pour les autres étapes les dates se calculent en partant de la fin du réseau, de la manière suivante :

Pour une étape quelconque *i* le début au plus **tard** est la différence :

durée de l'étape terminale – (durée du plus long chemin pour aller de l'étape *i* à l'éta- pe finale).

On obtient ainsi le graphe :



Remarque

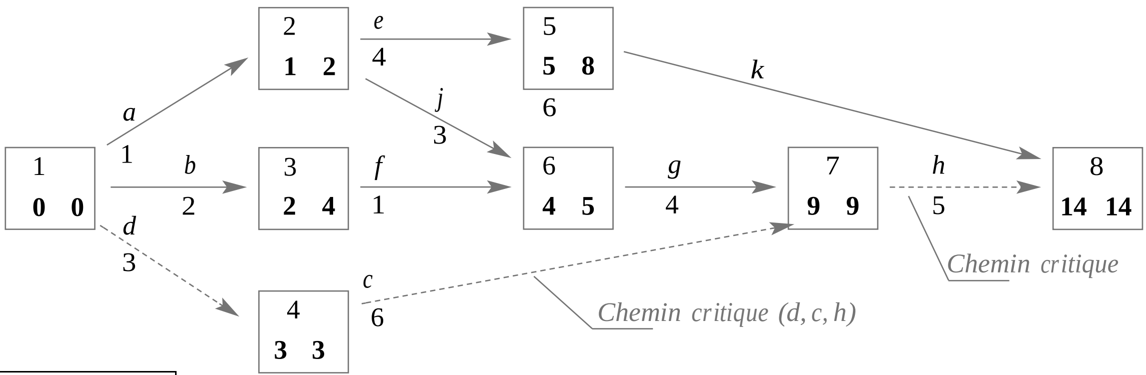
Dans le cas (fréquent) d'une étape *i* d'où ne part qu'une seule tâche de durée *d* :

début au plus tard de l'étape *i* = début au plus tard de la suivante *d*.

Étape 4 : Détermination du chemin critique

Le chemin critique est le chemin pour lequel tout retard pris sur l'une des tâches entraî- ne un retard dans la réalisation du projet.

C'est le chemin sur lequel les dates de début au plus tôt sont égales aux dates de début au plus tard.

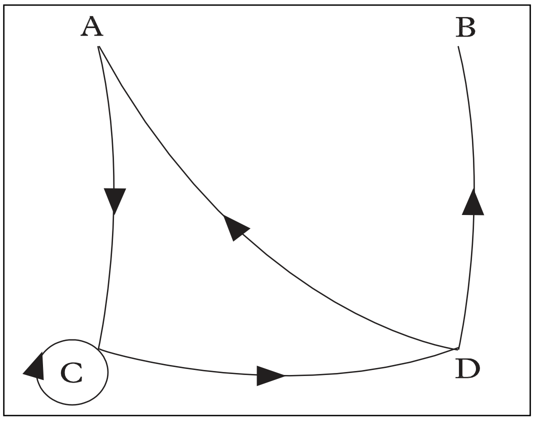


Exercice10

Exercices

Exercice 1

On considère le graphe orienté G défini sur S = {A, B, C, D} par la représentation sagittale ci-dessous.



a) Définir G en extension.

b) Donner 2 chemins de longueur 3 partant de D.

c) Donner un chemin hamiltonien.

Prédécesseurs – Successeurs

Exercice 2

On considère le graphe de l'exercice 1.

Déterminer l'ensemble Γ^- des prédécesseurs de A, B, C et D et l'ensemble Γ^+ de leurs successeurs.

Matrices adjacentes

Exercice 3

1. Déterminer la matrice adjacente M du graphe de l'exercice 1.

2. On considère la matrice adjacente $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ associée au graphe G défini sur S = {A, B, C}.

Donner une représentation sagittale de G.

Niveaux des sommets

Exercice 4

Sur l'ensemble S = {A, B, C, D, E, F, G} on considère le graphe G défini par :

G = {(A, B); (A, C); (A, F); (B, D); (C, D); (C, F); (D, G); (D, E); (F, E); (F, G); (G, E)}

a) Ordonner ses sommets par niveaux.

b) Donner une représentation par niveaux de G.

Opérations sur les matrices adjacentes

Exercice 5

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée à un graphe G.

1. Déterminer le nombre de chemins de longueur 2 reliant deux points quelconques du graphe.
2. Combien existe-t-il de chemins de longueur 2 arrivant en C ?

Exercice 6

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer les matrices $M \oplus M'$, $M \otimes M'$, $M^{[2]}$ et $M'^{[3]}$.

Exercice 7

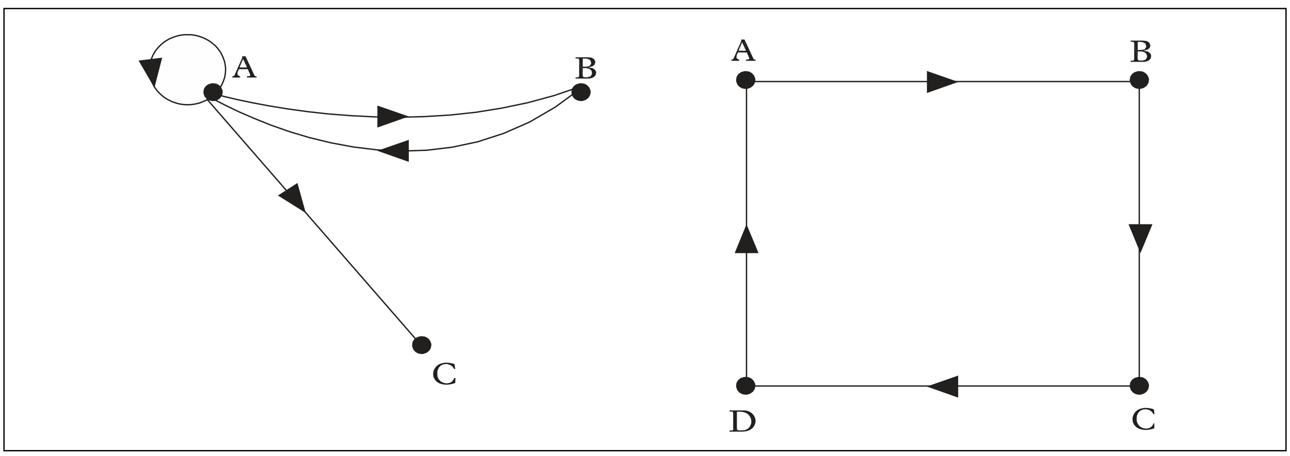
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée à un graphe G.

Existe-t-il au moins un chemin de longueur 3 reliant deux points du graphe ?

Fermeture transitive

Exercice 8

Tracer la fermeture transitive des graphes ci-dessous :



Exercice 9

On considère le graphe $G = \{(A, B); (A, C); (B, C); (C, A)\}$ défini sur $S = \{A, B, C\}$.

a) Donner sa représentation sagittale.

b) Déterminer sa fermeture transitive $\hat{G}$:

– graphiquement ;

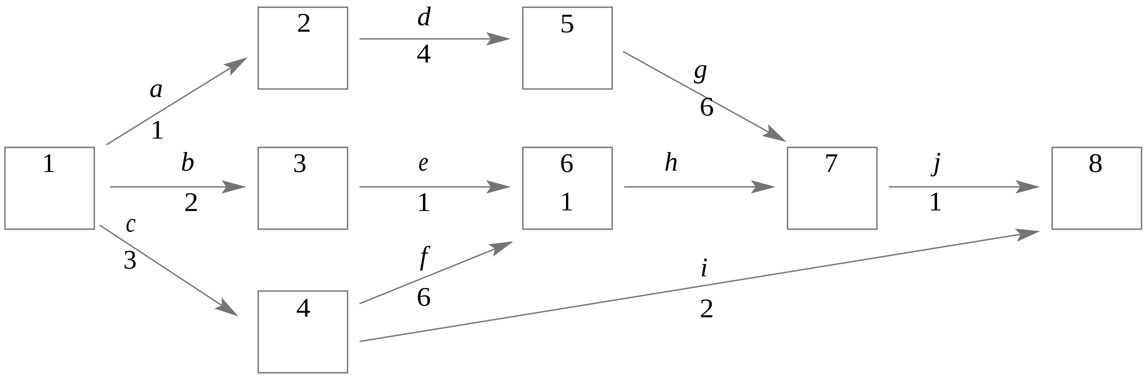
– par le calcul.

Méthode PERT

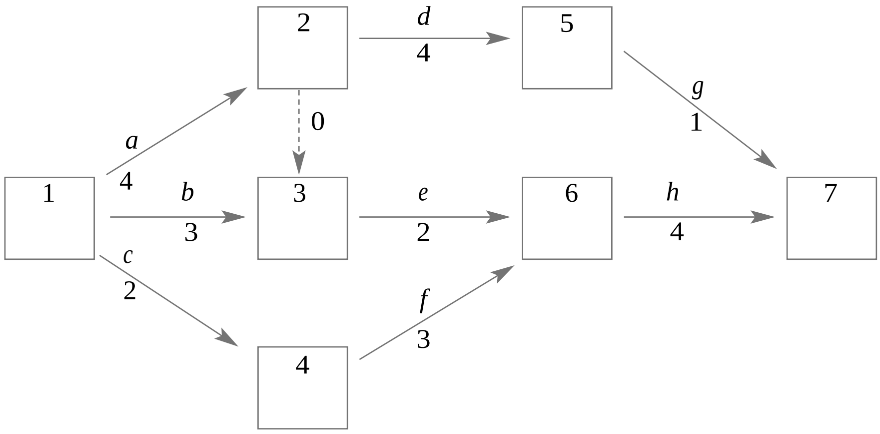
Exercice 10

Déterminer les dates de début au plus **tôt** et de début au plus **tard**, ainsi que le chemin critique pour les réseaux PERT ci-dessous :

1. Réseau 1



2. Réseau 2



Les étapes 2 et 3 sont reliées par une **tâche fictive** de durée nulle.

Exercice 11

Soit G le graphe défini sur S = {A, B, C} par le tableau des successeurs :

Sommets	Successeurs
A B C	A, B C B

1. Représenter le graphe G et, ***pour les sommets dans l'ordre indiqué***, donner sa matrice adjacente M.

2. a) Calculer les matrices M^2 et M^3, ainsi que les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.
b) Donner la liste des chemins de longueur 2 d'origine A.
c) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 d'origine B ?
d) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 arrivant en B ? Donner leur liste. e) Quel est le nombre de circuits de longueur 3 ? Donner leur liste.

Exercice 12

On considère l'ensemble S = {A, B, C, D, E} et G le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0
D	0	1	1	0	1
E	0	0	0	0	0

1. En lisant le tableau, dire si G comporte des boucles.
2. Représenter le graphe G.
3. Est-ce que G est une arborescence ? Quel est le sommet de niveau 0 ?
4. Donner la matrice d'adjacence M du graphe G.
5. Calculer les matrices $M^2 = M \times M$ et $M^3 = M^2 \times M$. Interpréter ce dernier résultat.

Exercice 13

(BTS Informatique de Gestion – Juin 1999)

1 - Soit G le graphe défini par le tableau des successeurs :

Sommets	Successeurs
A	A, B
B	C
C	C

a) Représenter le graphe G.

b) Donner la matrice d'adjacence du graphe G.

2 - Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les matrices $M^2 = M \times M$ et $M^3 = M^2 \times M$.

b) Quel est le nombre situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne de M^2 ? Que signifie-t-il par rapport au graphe G ? Donner la liste des chemins concernés.

c) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 issus du sommet A dans le graphe G ?

Exercice 14

(BTS IG Juin 2000 Nouvelle Calédonie)

On considère le graphe défini par le tableau suivant :

Sommets	Successeurs
A	A, B, D
B	A, C
C	A
D	C

1. Déterminer la matrice adjacente M de ce graphe.

2. a) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$, où $\times$ représente la multiplication des matrices. b) Utiliser le résultat précédent pour calculer le nombre total de chemins de lon- gueur 2 du graphe, puis le nombre de chemins de longueur 2 partant de A.

c) Citer tous les chemins de longueur 2 partant de A.

3. Citer tous les chemins de longueur 3 partant de D.

Travaux pratiques

TP 1

BTS Informatique de Gestion Juin 2000

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

1 - On considère l'ensemble E = $\{x_1; x_2; x_3\}$ et l'application f de E dans E définie par

$$f(x_1) = x_2, \qquad f(x_2) = x_3, \qquad f(x_3) = x_2.$$

a) Déterminer les antécédents par f de chacun des éléments de l'ensemble E. b) L'application *f* est-elle une injection de E dans E ? (Justifier).

c) L'application *f* est-elle une surjection de E sur E ? (Justifier).

2 - On considère le graphe orienté G, de sommets $x_1; x_2; x_3$ tel que les successeurs de $x_1; x_2; x_3$ sont respectivement $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$.

a) Donner une représentation géométrique de ce graphe.

b) On note M la matrice d'adjacence de G.

On constate que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Expliquer pourquoi la première ligne de M est 0 1 0.

c) On note $\hat{G}$ la fermeture transitive de G.

On rappelle que $\hat{G}$ est le graphe obtenu en conservant les sommets de G et en ajoutant, s'ils n'existent pas dans G, les arcs $(x_i; x_j)$ lorsqu'il existe un chemin d'origine x_i et d'extrémité x_j dans le graphe G.

Tracer une représentation géométrique de $\hat{G}$ et vérifier que la matrice $\hat{M}$ d'adjacence du graphe $\hat{G}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Calculer les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.

Vérifier que $\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$ où $\oplus$ représente l'addition booléenne des matrices.

TP 2

Recherche des chemins minimaux

Les liaisons entre différentes villes notées A, B, C, D, E, F et G constituent un réseau dont on extrait seulement celles permettant de se rendre de la ville A à la ville G.

Partie A

Dans cette première partie le tableau ci-dessous indique la ***durée*** en heures des trajets.

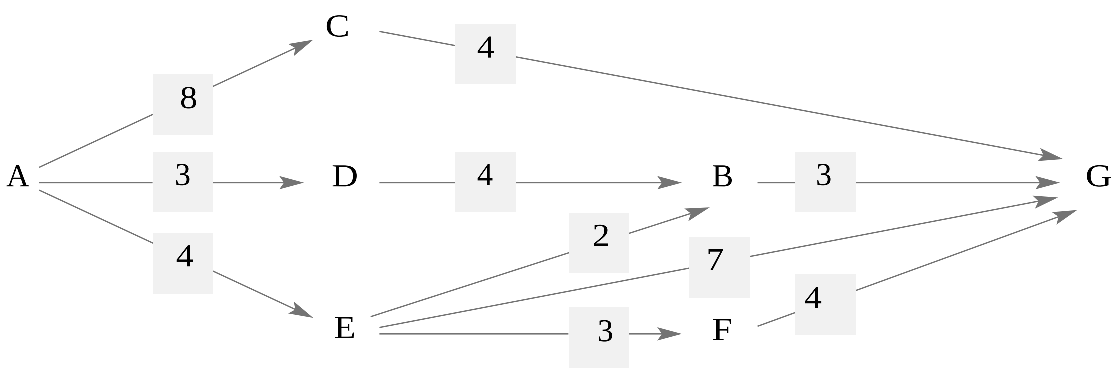
Arrivée / Départ	A	B	C	D	E	F	G
A	-	-	8	3	4	-	-
B	-	-	-	-	-	-	4
C	-	-	-	-	-	-	4
D	-	4	-	-	-	-	-
E	-	2	-	-	-	3	7
F	-	-	-	-	-	-	4
	-	-	-	-	-	-	-

On obtient ainsi un graphe valué G pour lequel on note S_n l'ensemble des sommets de niveau n.

1. Préliminaire

Vérifier que $S_0 = \{A\}$, $S_1 = \{C, D, E\}$, $S_2 = \{B, F\}$ et $S_3 = \{G\}$.

La représentation du graphe classé par niveaux ainsi que les durées des trajets est donnée ci-dessous.



L'algorithme permettant la recherche du chemin minimal entre deux étapes quelconques repose sur la propriété : « tout chemin optimal est composé de chemins eux-mêmes optimaux ».

On doit donc déterminer les sous-chemins minimaux de chemins quelconques, et pour cela on va indiquer pour chaque étape X une marque m(X).

X
m(X)

2. Recherche du chemin minimal :

On procède en complétant les marques niveau par niveau.

- Pour les sommets de niveau 0, par convention on pose : m(A) = 0.

A
0

- Pour les sommets de niveau 1, la marque « au plus tôt » est la valeur minimale des chemins venant du niveau 0. Par exemple m(D) = 3.

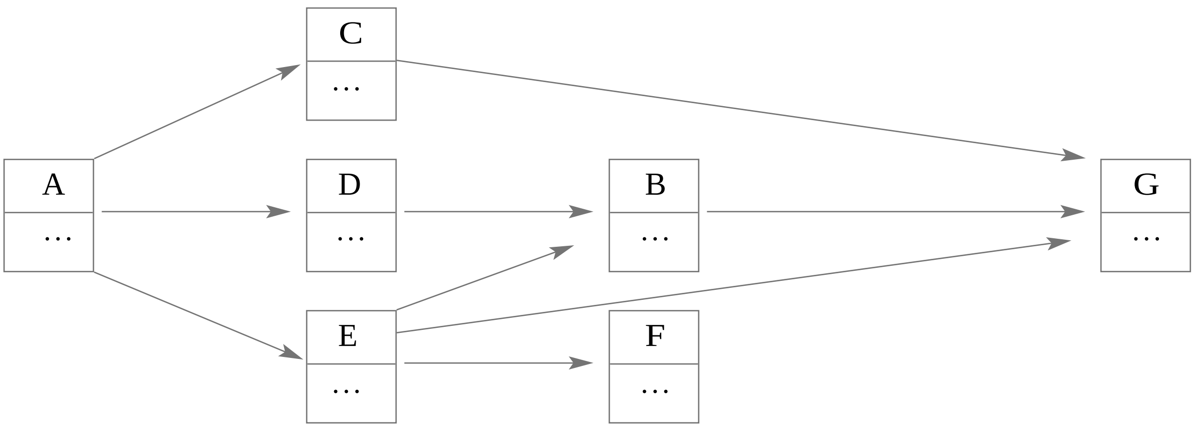
D
3

Pour les sommets des autres niveaux, la marque « au plus tôt » est la valeur minimale de tous les chemins venant des niveaux précédents.

Pour le sommet B : m(B) = min(3+4 ; 4+2) = 6.

B
6

Compléter avec les longueurs des chemins et les marques minimales la représentation graphique ci-dessous :



En déduire le chemin minimal c'est-à-dire ***la durée minimale*** du trajet entre A et G

Partie B

Dans cette deuxième partie le tableau ci-dessous indique la distance en kilomètres des trajets.

Départ \ Arrivée	A	B	C	D	E	F	G
A	-	-	500	200	210	-	-
B	-	-	-	-	-	-	250
C	-	-	-	-	-	-	200
D	-	250	-	-	-	-	-
E	-	130	-	-	-	200	450
F	-	-	-	-	-	-	210
G	-	-	-	-	-	-	-

1. Reprendre le graphe précédent ordonné par niveaux et indiquer les ***distances*** parcourues.

2. Recherche du chemin minimal :

Reprendre la démarche du A2. pour compléter avec les marques minimales la représentation graphique précédente.

En déduire le chemin minimal c'est-à-dire la ***distance minimale*** du trajet entre A et G.

TP 3

Méthode PERT

(D'après BTS comptabilité)

La construction d'un entrepôt peut se décomposer en 10 tâches reliées entre elles par des conditions d'antériorité.

L'entrepreneur chargé de cette construction vous communique le tableau des enchaînements des différentes activités, avec indication des durées respectives de chaque tâche :

Nomenclature	Désignation	Activités prérequises	Durée (jours)
a	Acceptation des plans	-	4
b	Préparation du terrain	-	2
c	Commande des matériaux	*a*	1
d	Creusage des fondations	*a, b*	1
e	Commande des portes et fenêtres	*a*	2
f	Livraison des matériaux	*c*	2
g	Coulage des fondations	*d, f*	2
h	Livraison des portes et fenêtres	*e*	10
i	Pose des murs, de la charpente, du toit	*g*	4
j	Mise en place des portes et fenêtres	*h, i*	1

Pour planifier son travail, il vous demande de représenter sur un graphe le chemin critique, indiquant le temps minimum nécessaire pour la réalisation de ce projet.