Exercices : 114 page 107 et 118 page 108

114 Un problème de coût

Une firme fabrique en grande quantité des corps de stylos en matière plastique recyclée.
Le coût total de production, en euros, pour une quantité x est donné par :

$$C(x) = 259 + 0{,}2\sqrt{900 + x} \text{ , où } x \geqslant 0 \text{ .}$$

1 **a.** Quel est le montant des **coûts fixes**, c'est-à-dire des coûts lorsque la production est nulle ?
b. Calculer le coût total de fabrication de 4 000 unités, c'est-à-dire 4 000 corps de stylo.
En déduire le coût moyen de fabrication de l'une de ces 4 000 unités.
2 **a.** Montrer que la fonction C est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
b. Justifier que lorsque la quantité fabriquée est supérieure à 2 700 unités, le coût total de fabrication est supérieur à 271 €.
3 **a.** Résoudre l'inéquation $C(x) \leqslant 300$.
b. En déduire la quantité maximale que l'on peut produire pour un coût total inférieur ou égal à 300 €.
c. Quel est alors le coût moyen d'une des unités fabriquées ?

118 Publicité

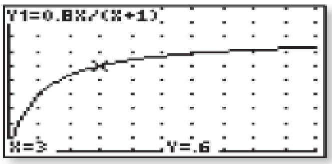
Une entreprise souhaite promouvoir un nouveau produit. Elle estime que la probabilité qu'une personne prise au hasard en connaisse le nom après x semaines de publicité s'exprime par :

$$p(x) = \frac{0{,}8x}{x+1} \text{ , pour } x \geqslant 0 \text{ .}$$

Une calculatrice graphique permet d'obtenir la représentation graphique, dans la fenêtre indiquée.
Sur T.I.™ : afficher le quadrillage dans « format » :

2nde format zoom QuadAff

```
FENETRE
 Xmin=0
 Xmax=10
 Xgrad=1
 Ymin=0
 Ymax=1
 Ygrad=0.1
 Xres=1
```



1 Calculer $p(3)$.
Que représente ce résultat dans le contexte du problème ?
2 Résoudre l'équation $p(x) = 0{,}5$.
Interpréter le résultat.

Voir A.P. partie B p. 229

3 **a.** Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$p(x) = 0{,}8 - \frac{0{,}8}{x+1} \text{ .}$$

b. En déduire que la fonction p est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Interpréter le résultat.
4 En utilisant la calculatrice, déterminer la durée nécessaire pour que la probabilité qu'une personne connaisse le produit soit :
a. 0,7. **b.** 0,75. **c.** 0,79 . **d.** 0,795 .
5 En utilisant les résultats de la question **4** , expliquer pourquoi l'entreprise a prévu une campagne publicitaire de sept semaines.

Correction exo 114

1 **a.** On calcule $C(0) = 259 + 0{,}2\sqrt{900 + 0} = 265$.
Les coûts fixes sont de 265 €.

b. On calcule :

$$C(4\,000) = 259 + 0{,}2\sqrt{900 + 4\,000} = 273.$$

Le coût total de fabrication de 4 000 unités est 273 €.
Le coût moyen de fabrication de ces 4 000 unités est $\dfrac{273}{4\,000} \approx 0{,}068$ €/unité.

2 **a.** Pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, on a : $900 + a \leqslant 900 + b$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{900 + a} \leqslant \sqrt{900 + b}$.
En multipliant par 0,2 puis en ajoutant 259, on a :

$$259 + 0{,}2\sqrt{900 + a} \leqslant 259 + 0{,}2\sqrt{900 + b},$$

c'est-à-dire $C(a) \leqslant C(b)$.
Donc la fonction C est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Comme la fonction C est croissante sur $[0\,;+\infty[$, lorsque $x > 2\,700$, on a : $C(x) > C(2\,700)$.
Or $C(2\,700) = 259 + 0{,}2\sqrt{900 + 2\,700} = 271$.
Lorsque la production est supérieure à 2 700 unités, les coûts de fabrication sont supérieurs à 271 €.

3 **a.** Pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$C(x) \leqslant 300 \Leftrightarrow 259 + 0{,}2\sqrt{900 + x} \leqslant 300$$
$$\Leftrightarrow 0{,}2\sqrt{900 + x} \leqslant 41 \Leftrightarrow \sqrt{900 + x} \leqslant 205$$
$$\Leftrightarrow 900 + x \leqslant 205^2 \Leftrightarrow x \leqslant 41\,125.$$

Donc $S = [0\,;41\,125]$.

b. La quantité maximale que l'on peut produire avec 300 € est de 41 125 unités.

c. Le coût moyen est alors $\dfrac{300}{41\,125} \approx 0{,}007$ €/unité.

Correction exo 118

1 $p(3)=\dfrac{0{,}8\times 3}{3+1}=0{,}6.$

Après 3 semaines de publicité, la probabilité qu'une personne connaisse le nom du produit est 0,6.

2 $p(x)=0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{0{,}8x}{x+1}=0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}8x=0{,}5\,(x+1)$

$$\Leftrightarrow 0{,}3x=0{,}5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}\approx 1{,}67.$$

Pour que la probabilité qu'une personne connaisse le nom du produit soit $\dfrac{1}{2}$, il faut compter environ 1,67 semaines de publicité.

3 **a.** Pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$0{,}8-\frac{0{,}8}{x+1}=\frac{0{,}8\,(x+1)-0{,}8}{x+1}=\frac{0{,}8x}{x+1}=p\,(x).$$

b. Pour tous réels a et b tels que $0\leqslant a\leqslant b$:

$$0<a+1\leqslant b+1.$$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{a+1}\geqslant\dfrac{1}{b+1}$.

En multipliant par $-0{,}8$ (négatif) : $\dfrac{-0{,}8}{a+1}\leqslant\dfrac{-0{,}8}{b+1}$.

En ajoutant 0,8 : $0{,}8-\dfrac{0{,}8}{a+1}\leqslant 0{,}8-\dfrac{0{,}8}{b+1}$.

Donc $p(a)\leqslant p(b)$: la fonction p est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

4 **a.** $S=\{7\}$ **b.** $S=\{15\}$

c. $S=\{79\}$ **d.** $S=\{59\}$

5 Au bout de 7 semaines, la probabilité qu'une personne connaisse le nom du produit est 0,7.

Plus de jours de publicité n'est pas vraiment rentable pour l'entreprise, car il faut 15 jours pour que la probabilité augmente de 0,05 et 72 jours pour que la probabilité augmente de 0,09.